А. И. Володарский

АРИАБХАТА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

А. И. Володарский

АРИАБХАТА

К 1500-летию
со дня рождения

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА
1977

Настоящая работа, издаваемая к 1500-летнему юбилею Ариабхаты, освещает весь круг проблем, затронутых этим ученым-энциклопедистом: системы нумераций, арифметику, алгебру, теорию чисел, геометрию, тригонометрию, астрономию. Деятельность Ариабхаты рассматривается в тесной связи с развитием всей древнеиндийской математики и астрономии; прослеживается влияние его идей на ученых стран Ближнего и Среднего Востока и средневековой Европы.

Ответственный редактор
кандидат физико-математических наук
М. М. Рожанская

В $\frac{20100-061}{054(02)-77}$ 66—77НП

Введение

19 апреля 1975 г. с советского космодрома был запущен первый индийский искусственный спутник Земли. По предложению премьер-министра Индии Индиры Ганди спутник назван именем выдающегося математика и астронома древности Ариабхаты.

В 1976 г. исполнилось 1500 лет со дня рождения великого индийского ученого Ариабхаты. «Ариабхата — «Коперник Востока» — на много веков опередил свое время,— сказал председатель Индийской организации космических исследований профессор С. Даван.— Его пример вдохновлял наших ученых, которые работали над спутником» [17, с. 97].

Ариабхате было всего 23 года, когда он написал свое первое и единственное дошедшее до нас произведение «Ариабхатия», законченное в 499 г. Это сочинение оказало огромное влияние на все последующее развитие математики и астрономии в Индии и положило начало новой научной традиции в этой стране. Имеется несколько публикаций труда Ариабхаты. В 1874 г. в Лейдене Керн издал санскритский текст с комментариями Парамешвары [37]. В 1906 г. этот текст вместе с комментариями вышел на хинди в переводе, выполненном Сингхом [38]. Следующее издание оригинального текста с комментариями Нилаканты было осуществлено в трех томах в 1930—1957 гг. [41].

Первые переводы на европейские языки были сделаны вскоре после публикации текста. В 1879 г. был издан французский перевод математического раздела, выполненный Роде [71]; английский перевод этого раздела Кейя появился в 1908 г. [63]. А спустя почти два десятилетия были опубликованы два полных перевода «Ариабхатии» на английский язык: Сенгупты в 1927 г. [39] и Кларка в 1930 г. [40]. Совсем недавно, в 1975 г., математическая часть «Ариабхатии» была переведена Элферингом на немецкий язык [55].

Творчество Ариабхаты изучали на протяжении многих веков. В XI в. выдающийся среднеазиатский ученый Бируни в работе «Индия», давая характеристику индийских математиков и астрономов, высоко оценивает научный вклад Ариабхаты. В Европе в XIX в. творчество Ариабхаты исследовали Бентли [43], Даджи [46], Кольбрук [50], Холл [62], Керн [66], Роде [72], Уиш [81]; в XX в. этой теме посвящены исследования многих ученых, среди них Датта [51—54], Флит [56], Гангули [57—61], Кей [64], Мазумдар [68], Пингри [69], Сен [73—74], Сенгупта [75—77].

В России изучение индийской математики началось с 1838 г., когда была опубликована статья В. И. Лапшина о разложении некоторых величин в бесконечные ряды [19]. В 1882 г. вышел исторический очерк М. Е. Ващенко-Захарченко о математической литературе индийцев [9], который позднее был включен в его «Историю математики» [10].

Индийской математике, и в частности отдельным сторонам творчества Ариабхаты, посвящены работы советских авторов Э. Я. Бахмутской [1, 2], И. Г. Башмаковой и А. П. Юшкевича [3], А. И. Володарского [11—16], А. Е. Раик и В. Н. Ильина [25], Б. А. Розенфельда, М. М. Рожанской, З. К. Соколовской [28], А. П. Юшкевича и Б. А. Розенфельда [27, 34, 35], а также других [5, 20, 30—32]. Сведения об эпохе, в которую жил Ариабхата, даны в книгах Г. М. Бонгарда-Левина, Г. Ф. Ильина, Э. А. Грантовского [6—8].

Имя Ариабхаты транскрибируется по-разному, иногда оно произносится как Арьябхата или Ариабата [17]. В настоящей работе написание собственных имен дается в соответствии с традицией, установившейся в советской историко-математической литературе.

Автор считает своим приятным долгом выразить сердечную благодарность докторам физико-математических наук Б. А. Розенфельду и А. П. Юшкевичу, доктору исторических наук Г. М. Бонгарду-Левину, кандидатам физико-математических наук Л. Е. Майстрову и М. М. Рожанской за советы при подготовке книги.

О жизни и творчестве Ариабхаты

До нас дошло очень мало сведений о жизни Ариабхаты. Мы не знаем, кем были его родители, кто были его учителя, мы не располагаем точной датой его смерти.

О самом себе Ариабхата лишь дважды упоминает в трактате «Ариабхатия». В части III, правиле 10 он пишет: «Когда прошли три юги и шестьдесят раз по шестьдесят лет, тогда истекли 23 года моей жизни». Согласно индийской традиции существуют четыре эпохи — юги: крита (золотой век), трета (серебряный век), двапара (бронзовый век), кали (железный век). По индийским представлениям, последняя эпоха — калиюга — началась в 3102 г. до н. э. С ее начала прошло «шестьдесят раз по шестьдесят лет», таким образом, «Ариабхатия» была написана в 499 г. 23-летним автором, что позволяет считать 476 год — годом его рождения.

Мы не знаем точно места его рождения. В части II, правиле 1 приводится лишь название крупнейшего индийского научного центра, где Ариабхата мог работать: «Воздав почтение Брахману, Земле, Луне, Меркурию, Венере, Солнцу, Марсу, Юпитеру, Сатурну и созвездиям, Ариабхата впредь излагает науку, которая очень почитается в Кусумапуре». Новейшие исследования позволяют считать его родиной Ашмаку — область в Южной Индии. Кроме этих сведений об авторе, нам ничего не известно, но до нас дошло его знаменитое сочинение, которое было поворотным пунктом в развитии точных наук в Индии. «Ариабхатия» — это своеобразная энциклопедия, в которой собрано самое лучшее, что было сделано в предшествующие эпохи, все наиболее важное и ценное в индийской математике и астрономии. Имеются сведения о 12 различных комментариях к этому сочинению, первые из которых были составлены в середине VI в., последние — в середине XIX в. Среди авторов комментариев были известные индийские математики и астрономы, в том числе Бхаскара I (VII в.), Парамешвара (XV в.), Нилаканта (XV—XVI вв.). Сохранилось довольно много рукописей некоторых комментариев, показывающих, что «Ариабхатия» широко изучалась. Об этом же свидетельствуют и комментарии на местных, в основном южноиндийских, языках.

Текст трактата, написанный на санскрите, был переведен на языки хинди, телугу, малаялам.

Наиболее ранние сведения о развитии математики в Индии относятся к эпохе Индской цивилизации (середина III тысячелетия до н. э.), получившей свое название по раскопкам двух больших городов: Мохенджо-Даро и Хараппы, расположенных в бассейне реки Инда [21]. До нас не дошли тексты математического характера, а сохранившиеся надписи пока не расшифрованы. Поэтому об уровне математических знаний в ту эпоху можно судить лишь косвенно, в основном по результатам археологических раскопок. Древние индийцы считали десятками, о чем свидетельствуют насечки на сохранившемся инструменте для измерения длины. Числа обозначались штрихами-зарубками. Такие зарубки обнаружены на каменных кольцах, из которых строились колонны, поддерживавшие кровлю жилищ. Числа от 1 до 9 обозначались с помощью вертикальных или горизонтальных штрихов, причем таких штрихов было столько, сколько единиц в данном числе. Для удобства подсчета числа от 5 до 7 состоят из двух, а число 9 из трех групп зарубок, отстоящих друг от друга на небольшое расстояние.

В некоторых играх, найденных в городах долины Инда, применялись игральные кости. Обнаружена самая древняя в мире игральная кость — кубик, значительно больших размеров, чем те, которые используются сейчас; с каждой стороны углублениями обозначены числа — от одного до шести.

Чрезвычайно широкое распространение имели гири. Исследования показали, что между гирями существовала строгая система весовых мер, основанная на удвоении для небольших гирь и на умножении на 10 и 100 для более крупных. Строгое соотношение сохранялось и между длиной, шириной и высотой кирпичей, из которых строились здания. Стороны кирпичей относились как 1 : 2 : 4 или 1 : 3 : 9.

При раскопках найдено большое число разнообразных предметов строго геометрической формы.

Следующие наши сведения о математических и космогонических представлениях индийцев относятся ко II тысячелетию до н. э., ведийскому периоду — времени составления религиозно-философских книг — вед. В ту эпоху Вселенная считалась разделенной на три региона: Землю, воздушное пространство и небо. Строфы «Ригведы», древнейшей и наиболее значительной из четырех вед, говорят о том, какое значение придавали древние индийцы Солнцу — Сурье — для жизни природы. Своим светом Солнце не только освещает миры, но и поддерживает жизнь на Земле: «Счастливые золотистые кони Сурьи, светлые, быстрые, сопутствуемые ликованием, достойные почтения, вступили на поверхность неба, [они] обходят небо и землю за один день. Эта божественность Сурьи, эта мощь, действуя, собирает воедино простертое» [18, с. 27—28].

В ведийский период сложились представления о Солнце, Луне, пяти известных в древности планетах — Марсе, Меркурии, Юпитере, Венере, Сатурне; фазах Луны, «накшатрах» — лунных стоянках. Число комментариев к ведам чрезвычайно велико, составлялись они в течение многих веков. Математических сведений больше всего в «Шульба-сутре», которая дошла до нас в нескольких редакциях и датируется серединой I тысячелетия до н. э. В ту эпоху широкое распространение получила десятичная нумерация, существовали специальные названия для достаточно больших степеней десяти. Эти наименования порой образовывались с помощью аддитивного, субтрактивного и мультипликативного принципов, которые позднее стали необходимыми компонентами при создании позиционной системы счисления. Большой интерес представляют действия с иррациональными числами, их складывали и умножали, как обычные величины.

В ведийский период индийцы умели находить корни полного и неполного квадратного уравнения, решали некоторые частные случаи неопределенных уравнений первой и второй степени и геометрические задачи на вычисления, построения и преобразования.

В конце I тысячелетия до н. э. и в первые века нашей эры шло интенсивное развитие астрономии и математики, которое получило завершение в трактате Ариабхаты.

Ариабхата оказал значительное влияние практически на всех позднейших индийских математиков и астрономов: они либо комментировали его сочинение, либо цитировали его.

Современные индийские ученые называют Ариабхату, как уже упоминалось, «Коперником Востока». С полным основанием его можно сравнивать и с Евклидом, «Начала» которого были для эллинистической математики, как и «Ариабхатия» для индийской науки, важной вехой в развитии математического естествознания.

Кроме своего основного сочинения, Ариабхата написал комментарии к «Сурье-сиддханте», астрономическому сочинению IV—V вв., но они до нас не дошли. Впрочем, некоторые основные идеи этих комментариев нашли отражение в астрономических разделах его основного сочинения.

«Ариабхатия» сравнительно небольшое сочинение, оно содержит 118 строф и написано в традиционной для индийцев манере — стихами, в которых нет рифмы; основное внимание уделяется размеру. Стихотворная форма изложения способствовала лучшему запоминанию правил. Трактат состоит из четырех частей: Дашагитики — системы обозначения чисел (10 строф), Ганитапады — математики (33 строфы), Калакрийапады — определения времени (25 строф), Голапады — небесной и земной сфер (50 строф).

В астрономической части, имеющей много общего с «Сурья-сиддхантой», Ариабхата высказал гениальную догадку о вращении Земли вокруг своей оси. Это было очень смелой гипотезой для его времени, шедшей вразрез с брахманскими религиозными представлениями и не принятой последующими индийскими астрономами. Зато математическая часть, очень разнообразная по структуре, содержит много идей, в дальнейшем развитых другими учеными как в самой Индии, так и за ее пределами. Это первое дошедшее до нас специальное математическое сочинение индийцев; часть математических правил стала известна нам именно в изложении Ариабхаты. Математические вопросы содержатся не только в специальной второй части, но и во всех остальных разделах.

Никаких сведений о том, как были получены правила, никаких доказательств в трактате нет. Изложение предельно лаконично, все правила даются в форме рекомендаций и советов. Лишь изредка правила содержат намек на вывод. В этом отношении трактат Ариабхаты не является исключением среди работ математиков Индии.

«Ариабхатия» охватывает многие вопросы арифметики, алгебры, геометрии, теории чисел, тригонометрии. Величайшим достижением индийских ученых было создание десятичной позиционной системы счисления, отдельные компоненты которой были и у других народов, но только в Индии она нашла свое полное завершение. Первые правила в этой системе встречаются именно у Ариабхаты — это правила извлечения квадратного и кубического корней. Сформулированы они очень кратко, и их трудно понять без подробного комментирования.

В «Ариабхатии» имеются несколько задач, сводящихся к решению линейного уравнения с одним неизвестным. Одна из них — знаменитая «задача о курьерах», обошедшая затем мировую алгебраическую литературу. В ней требуется определить время встречи двух тел, которые движутся навстречу друг другу или же одно вслед за другим. Ряд задач «Ариабхатии» приводят к квадратным уравнениям, например нахождение числа членов арифметической прогрессии и вычисление процентов. Аналогичные задачи на сложные проценты решались многими индийскими авторами. Подобные примеры встречаются и в европейских руководствах нового времени, например в «Началах алгебры» (1746) французского математика А. Клеро.

Впервые правила арифметической прогрессии и примеры на нее даны в «Ариабхатии», в дальнейшем они встречаются в большинстве индийских математических сочинений. Ариабхата знал правила для общего члена, суммы, числа членов арифметической прогрессии. Интересно, что при выводе формулы числа членов он решал полное квадратное уравнение. В «Ариабхатии» приводятся правила суммирования натуральных квадратов и кубов, некоторых других рядов; впрочем, они были ранее известны вавилонянам и грекам.

Огромный вклад внес Ариабхата в развитие теории чисел и ее важного раздела — решения неопределенных уравнений. К этой проблеме в Индии обратились в связи с календарно-астрономическими задачами, в которых нужно было определить периоды повторения одинаковых относительных положений небесных светил — Солнца, Луны, планет с различными периодами обращения и другие с ними связанные проблемы. Задача сводилась к отысканию целых чисел, дающих при делении на данные числа данные остатки, т. е. удовлетворяющих неопределенным линейным уравнениям и их системам.

Неопределенными уравнениями занимался греческий математик III в. Диофант, который искал рациональные решения. После Ариабхаты индийцы обратились к решению этих уравнений в целых положительных числах, что являлось более сложным. Вряд ли здесь можно говорить о прямом заимствовании у греков: ученые этих стран пришли к теоретико-числовым задачам, исходя из разных проблем, да и сами методы были различные. Скорее это свидетельствует о связях индийских ученых с математиками древнего Китая, которые также пришли к неопределенным уравнениям, занимаясь астрономическими вычислениями и задачами на остатки, и решения находили лишь в целых числах.

Вклад Ариабхаты в теорию чисел весьма существен: он первым в мировой литературе формулирует очень изящные приемы решения в целых числах неопределенного уравнения первой степени $ax + b = cy$. Решение дается так называемым методом «рассеивания» или «размельчения», который изложен довольно кратко.

Интересны тригонометрические проблемы, изложенные в «Ариабхатии». В своих исследованиях по тригонометрии индийцы, по-видимому, опирались на труды ранних эллинистических астрономов, у которых была довольно развитая тригонометрия хорд. Однако индийцы заменили хорды синусами, что позволило им ввести различные функции, связанные со сторонами и углами прямоугольного треугольника. Они рассматривали линию синуса, линию косинуса и линию, получившую позднее в Европе название синуса-версуса. Наиболее ранняя таблица синусов имеется в «Сурье-сиддханте» и в первой части «Ариабхатии». Таблица составлена через каждые $3°45' = 225'$, т. е. через 1/24 часть дуги квадранта.

Астрономические части «Ариабхатии» опирались на классические пять сиддхант, которые позднее были подробно описаны Варахамихирой (VI в.) в его «Панча-сиддхантике» [80]. Работы Варахамихиры по астрономии носили скорее компилятивный, чем оригинальный, характер; он был более знаменит как астролог, составивший несколько астрологических трактатов, на которых заметно сказалось эллинистическое влияние. В его астрологических сочинениях встречаются элементы греческой научной терминологии.

Последователем и комментатором Ариабхаты был Бхаскара I, написавший специальные пояснения к «Ариабхатии», а также два трактата: «Махабхаскария» и «Лагхубхаскария» [44]. В этих работах получили дальнейшее развитие вопросы неопределенного анализа и ряд астрономических проблем.

Современником Бхаскары I был Брахмагупта — автор двух известных сочинений: «Брахма-спхута-сиддханта» [48] и «Кхандакхадьяка» [49]. Первое из них было написано 30-летним Брахмагуптой в 628 г. под влиянием идей Ариабхаты. Достаточно отметить, что, следуя Ариабхате, Брахмагупта включил в свой, в основном астрономический, трактат две математические главы, содержащие ряд новых правил. И в то же время «Ариабхатия» в этом сочинении была подвергнута острой критике за изложение правила о вращении Земли вокруг своей оси, за научное объяснение теории солнечных и лунных затмений; впрочем, и к другим индийским астрономам автор отнесся критически. Он выступал против заимствования элементов вавилонских и греческих астрономических концепций. Второе сочинение Брахмагупты, написанное им в 67-летнем возрасте, уже не содержало необоснованной критики и показало, что Брахмагупта на склоне лет отошел от ортодоксальных традиций.

В 1881 г. вблизи деревни Бахшали на северо-западе Индии была найдена рукопись неизвестного автора по арифметике и алгебре, время составления которой ученые датируют VI—VIII вв. н. э. [65].

К середине IX в. относится творчество крупнейшего математика Магавиры, автора «Краткого курса математики» [11, 67]. Это первый индийский трактат, посвященный полностью математике; предшествующие ученые лишь включали математические главы в свои астрономические сочинения. Эти главы были довольно сжатыми, почти полностью отсутствовали примеры и задачи, которые в большом количестве приводит Магавира. Хотя сочинение называется кратким, оно по объему значительно превосходит все известные математические сочинения средневековых индийских авторов. В этом трактате впервые приводятся многие математические правила, в том числе правила умножения и деления, частные случаи возведения чисел в квадрат и куб и извлечения квадратного и кубического корней. В алгебраических и теоретико-числовых разделах мы знакомимся с новыми правилами решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, системы линейных неопределенных уравнений, неопределенных уравнений второй степени и системы таких уравнений; там же приводятся оригинальные методы решения линейных уравнений с несколькими неизвестными, новые правила на арифметическую и геометрическую прогрессии. Впрочем, ряд правил, впервые изложенных в этом сочинении, безусловно, были известны Ариабхате.

Младшим современником Магавиры и его последователем был другой крупный индийский математик Шридхара (IX — X вв.), автор «Патиганиты» [33] и «Тришатики» [70]. Ему принадлежат несколько новых правил на действия с дробями, на проценты, на арифметическую и геометрическую прогрессии. Сочинения Шридхары по математике были очень популярны и неоднократно комментировались.

В X в. жил Ариабхата II, составивший трактат «Махасиддханта» [42], который следовал больше ортодоксальной традиции, хотя в математической главе его астрономической сиддханты имеются многочисленные аналогии с «Ариабхатией». В XI в. математик и астроном Шрипати написал трактат «Сиддханта-шекхара» [78].

К XII в. относится творчество еще одного знаменитого индийского математика и астронома Бхаскары II [36, 45]. Влияние его идей на ученых последующих поколений огромно; еще при жизни Бхаскары были организованы специальные школы для изучения его сочинений. Бхаскара (1115 — позднее 1183) был автором шести работ. Специально математике посвящены два трактата: «Лилавати» и «Биджа-ганита». Остальные сочинения по астрономии, хотя и содержат отдельные математические вопросы, преимущественно тригонометрического характера. «Лилавати» состоит из 13 глав, в которых описаны действия над целыми и дробными числами, включая извлечение квадратного и кубического корней; дается решение арифметических задач с помощью способа обращения, правила одного ложного положения; приводятся задачи на бассейны, ранее известные грекам и китайцам, суммирование некоторых арифметических рядов, ряд комбинаторных задач. В разделах, посвященных геометрии, содержатся правила измерения объемов различных тел, вопросы измерения плоских фигур и задачи на вычисление сторон прямоугольных треугольников. Подробно проблемы неопределенного анализа разобраны в «Биджа-ганите», состоящей из восьми глав. Там же приводится учение об алгебраических уравнениях первой и второй степени, разобраны некоторые геометрические вопросы и даются два доказательства теоремы Пифагора.

Главное астрономическое сочинение Бхаскары «Сиддханта-широмани», написанное в 1150 г., делится на две части: математическую астрономию и небесную и земную сферы. В них ставятся следующие проблемы: о средней и истинной долготе планет, о суточном движении, о солнечных и лунных затмениях, о соединениях планет, о соединениях планет со звездами, о природе небесной и земной сфер, о космографии и географии, об эксцентрико-эпициклической модели планет, о построении армилярной сферы, о принципах сферической тригонометрии, об астрономических инструментах, дается описание сезонов года.

Из более поздних индийских математиков и астрономов назовем Нараяну (XIV в.), сохранилась неполная рукопись его трактата «Биджа-ганита», и Ганешу (XVI в.), автора обширных комментариев к работам Бхаскары II.

Каково же научное значение «Ариабхатии»? Ариабхата был одним из первых, кто ввел функции синуса и применил их в астрономии. Он получил верное уравнение для орбиты планет с помощью апсиды [часть III, правила 22—23]; дал свое обоснование эпициклической теории для объяснения неравномерностей в движении планет [часть III, правило 21]; привел верные выражения для углового диаметра земной тени на лунной орбите [часть IV, правила 39, 40]; умел находить продолжительность затмения [часть IV, правила 41, 42]; сформулировал правила для определения части диска Луны, который будет затемняться во время затмения [часть IV, правила 43, 44]; вычисленная им продолжительность года, составляющая 365, 2586 805, более близка к современной величине, чем длина года, предложенная Птолемеем [часть III, правило 1]; он был первым индийским астрономом, который высказал гипотезу о вращении Земли вокруг своей оси [часть IV, правило 9].

Что касается математического раздела «Ариабхатии», то здесь приводится первое в Индии описание извлечения квадратного и кубического корней [часть II, правила 4, 5]; этот метод оказал значительное влияние на работы ученых стран Ближнего и Среднего Востока и в схожем виде встречается у многих из них; Ариабхата первым формулирует правила решения в целых числах неопределенного уравнения первой степени с двумя неизвестными [часть II, правила 32, 33]; им указаны способы нахождения общего члена, суммы и числа членов арифметической прогрессии [часть II, правила 19, 20]; большое значение имеет приведенная им таблица синусов [часть II, правило 12].

Мы остановились лишь на самых основных правилах, входящих в трактат Ариабхаты, либо сформулированных впервые, либо более точно, чем у других ученых.

Математика в «Ариабхатии»

Арифметика

Санскритское название арифметики — «вьякта ганита», т. е. «искусство вычисления с известными величинами». Вычисления, которые производили на счетной доске, покрытой песком или пылью, а то и прямо на земле, называли «дхули карма» («работа с пылью»). Числа писались заостренной палочкой. При выполнении арифметических действий легко было стирать одни результаты и на их месте записывать другие. Все это наложило отпечаток на вычислительные методы индийцев.

В средние века индийские способы выполнения арифметических действий вместе с десятичной позиционной системой счисления перешли в арабоязычную, а позднее и в западноевропейскую математическую литературу. Так как вычисления производились на бумаге, то ненужные в дальнейших выкладках цифры стали перечеркиваться и результаты стали записывать над или под перечеркнутыми числами.

Индийские математики к основным арифметическим операциям относили следующие восемь действий: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в квадрат, извлечение квадратного корня, возведение в куб, извлечение кубического корня. Большинство этих операций не упоминается в сиддхантах. Ариабхата приводит только правила извлечения квадратного и кубического корней, Брахмагупта излагает лишь правило извлечения кубического корня. После Магавиры эти операции приводили все индийские математики.

Индийские системы нумераций. Ни в одной другой стране мира не существовало столько систем нумераций, как в Индии. К ним относились: непозиционная система счисления; словесная, как непозиционная, так и позиционная; алфавитная позиционная; цифровая позиционная система счисления.

Основанием большинства индийских цифровых систем служило число 10. Обращает внимание наличие развитой терминологии для обозначения степеней десяти. Древние индийцы разработали специальные названия для 10^{20}, а в отдельных случаях и для более высоких степеней; греки же имели математический термин для 10^4 — мириада, римляне для 10^3 — милле. Следуя общей традиции, Ариабхата приводит наименования для чисел, кратных десяти, вплоть до 10^9: «Числа эка, даша, шата, сахасра, аюта, ниюта, праюта, коти, арбуда и вринда — каждые в десять раз больше предшествующего» [часть II, правило 2].

В первой части «Ариабхатии» вводится для обозначения чисел алфавитная система нумерации, которая является вариацией десятичной позиционной системы счисления. Правда, в отличие от буквенных систем греков, арабов и других народов, индийские алфавитные системы не нашли широкого употребления в практике. Алфавитная система, предложенная Ариабхатой, состоит в следующем: 33 буквы санскритского алфавита делятся на две неравные группы; 25 букв первой группы обозначают числа от 1 до 25, восемь букв второй группы обозначают числа от 3 до 10.

Первая группа

k — 1	c — 6	ṭ — 11	t — 16	p — 21
kh — 2	ch — 7	ṭh — 12	th — 17	ph — 22
g — 3	j — 8	ḍ — 13	d — 18	b — 23
gh — 4	jh — 9	ḍh — 14	dh — 19	bh — 24
n̄ — 5	ñ — 10	ṇ — 15	n — 20	m — 25

Вторая группа

y — 3	l — 5	ś — 7	s — 9
r — 4	v — 6	ṣ — 8	h — 10

Для обозначения разрядов Ариабхата употребляет девять гласных: a, i, u, ṛ, ḷ, e, ai, o, au, располагающихся таким образом:

au		o		ai		e		ḷ		ṛ		u		i		a	
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
										Десятки миллионов	Миллионы	Сотни тысяч	Десятки тысяч	Тысячи	Сотни	Десятки	Единицы

Свою систему Ариабхата строит на сочетании согласных и гласных. Согласные из первой группы всегда стоят на местах единиц, сотен, десятков тысяч и т. д.; согласные из второй группы занимают места десятков, тысяч, сотен тысяч и т. д.

Например, ga; g — согласная, обозначающая цифру 3 из первой группы, стоит в сочетании с гласной a на месте единиц.

Таким образом, ga = 3.

Согласная r, обозначающую цифру 4 из второй группы, в сочетании с гласной i находится на месте тысяч. Таким образом, ri = 4000; ti = 1100; mu = 250 000.

Если встречаются вместе две согласные с одной гласной, то числа суммируются. Так, kma = ka + ma, т. е. 1 + 25 = 26.

Вот примеры образования других чисел:

	ṛ		u		i		a		
khyughṛ =	○	○	○	○	○	○	○	○	= 4320000,
		gh	y	kh					
		4	3	2	0	0	0	0	

	ṛ		u		i		a		
cayagiyin̄usuchlṛ =	○	○	○	○	○	○	○	○	
	l	ch	s	n̄	y	g	y	c	=57 753 336.
	5	7	7	5	3	3	3	6	

Алфавитная система Ариабхаты позволяет записать довольно большие числа, поскольку для обозначения следующих 18 позиционных мест употреблялись те же гласные со специальными диакритическими знаками.

С помощью этой системы можно было одно и то же число выразить несколькими способами, например:

$$435 = \begin{cases} \text{ñayaghi} — 400+30+5 \\ \text{nṇaghi} — 400+20+15 \\ \text{mñaghi} — 400+25+10 \end{cases}$$

Употреблялись и разновидности подобной системы. Так, цифры обозначались согласными

1 — k, ṭ, p, y	5 — ñ, n, m, š	8 — j, d, h
2 — kh, ṭh, ph, r	6 — c, ṫ, ṣ	9 — jh, dh
3 — g, ḍ, b, l	7 — ch, th, s	0 — ñ, n
4 — gh, ḍh, bh, v		

и гласными.

Если стоят рядом несколько согласных, то числовое значение имеет лишь последняя; гласные, обозначающие нуль, служат также для разделения цифр. Буквенные выражения записываются справа налево. Для такого вида алфавитной системы характерно смысловое значение буквенной записи, например:

ra (2) — gha (2) — va (4) — ya (1) = 1442 (дательный падеж от Рагхава — потомка Рамы);

bha (4) — va (4) — ti (6)=644 (3-е лицо единственного числа настоящего времени от глагола «быть»).

Записи в алфавитной системе этого типа найдены в сочинениях Бхаскары I; впрочем, Сурьядева в своих комментариях к «Ариабхатии» указывает, что эта система была известна еще Ариабхате.

Сложение. Многие авторы, в том числе Ариабхата, Брахмагупта, Магавира, Шридхара, считают операцию сложения целых чисел общеизвестной, поэтому правила сложения они не приводят. Ариабхата II определяет сложение так: «Собирание в одно нескольких чисел есть сложение» [42, с. 143]. Операция сложения была описана Бхаскарой II следующим образом: «Сложи цифры, стоящие на одних и тех же позиционных местах, в прямом или в обратном порядке» [36, с. 5]. При прямом порядке сложения процесс начинается с единиц, при обратном порядке — со старших разрядов (см. стр. 21).

Первый пример соответствует прямому порядку сложения, второй — обратному. Иногда сумму записывали не под слагаемым, а над ним; этот способ встречается у греков и римлян. Метод сложения вместе с десятичной позиционной системой перешел в арабоязычную математическую литературу (Хорезми, IX в.), а затем в Европу, где сложение производилось в основном начиная с единиц — этого требовал уже в XIII в. Сакробоско. Начиная с XV в. сложение выполняется так же, как и в настоящее время.

	2		2
	5		5
	32		32
	+193		+193
	18		18
	10		10
	100		100
Сумма единиц	20	Сумма сотен	2
Сумма десятков	14	Сумма десятков	14
Сумма сотен	2	Сумма единиц	20
	360		360

Вычитание. Ариабхата не приводит правила вычитания целых чисел; определение вычитания дано Ариабхатой II: «Отбрасывание некоторого числа из общего есть вычитание; то, что остается, называется остаток» [42, с. 143]. Правило вычитания целых чисел имеется у Бхаскары II: «Вычитай числа в соответствии с их позиционными местами в прямом или в обратном порядке» [36, с. 5]. При прямом порядке вычитания операция начинается с единиц, при обратном порядке операцию надо начинать со старших разрядов. При вычитании более легким является обратный порядок, при сложении — прямой.

Математики стран Ближнего и Среднего Востока переняли от индийцев метод вычитания, но заменили стирание зачеркиванием.

Операцию вычитания слева направо выполняли в Европе Сакробоско (XIII в.) и Максим Плануд (XIII — XIV вв.).

Умножение. Общепринятый индийский термин для умножения — «гунана» — встречается еще в ведийской литературе. Для умножения употребляются также термины «ханана», «вадха», «кшайа», которые означают «уничтожить», «разрушить». Эти названия вошли в употребление после изобретения десятичной позиционной системы и появились в связи с тем, что при новых способах умножения промежуточные цифры последовательно стирали — уничтожали — и на их месте записывали результаты операции. Аналогичные термины употребляются в работах Ариабхаты, Брахмагупты, Шридхары и других авторов. Эти же названия имеются и в «Бахшалийской рукописи».

В ведийский период использовался термин «адхьяса», который одновременно означал и сложение; видимо, тогда умножение производили повторением операций сложения. В «Бахшалийской рукописи» также встречается термин «параспаракритам» — «сделать совместно». Старинная терминология показывает, что способ умножения определялся как «процесс сложения непрерывно повторяющегося множимого столько раз, каково значение множителя». Это определение появилось в комментариях Бхаскары I к «Ариабхатии» [54, т. 1, с. 134].

Ариабхата не упоминает общего способа умножения, вероятно, считает его элементарным и слишком хорошо знакомым, чтобы включать в свою довольно краткую работу. Брахмагупта в математических разделах приводит названия некоторых методов с очень сжатым описанием процесса: «Множимое, повторенное, так же как и в [методе] гомутрика, столько раз, сколько единиц содержится в множителе, последовательно умножается на них, и [результаты] складываются, это дает произведение. Или множимое, повторенное столько раз, каковы составляемые части множителя» [36, с. 319]. Далее Брахмагупта пишет: «Множимое умножается на сумму или разность множителя и произвольно выбранного количества, и из результата вычитается или к результату прибавляется произведение произвольно выбранного количества на множимое» [36, с. 320]. Таким образом, Брахмагупта упоминает четыре метода умножения: гомутрика, кханда, бхеда и ишта. Общий метод умножения кавата-сандхи им пропущен.

Магавира и Шридхара приводят описание четырех следующих методов: кавата-сандхи, татстха, рупа-вибхага, стхана-вибхага. Бхаскара II к четырем способам Брахмагупты присоединяет метод ишта-гунана, который несколько ранее приведен Шрипати в его «Сиддханта-шекхара». Ганеша дает описание так называемого «метода решетки».

Основным способом умножения в индийской математике является метод кавата-сандхи — «соединение створок дверей». Впервые он кратко описан Шридхарой: «Расположив множимое под множителем, как в соединении

створок дверей, следует производить умножение последовательно в обратном или прямом порядке, передвигая каждый раз [множитель]» [33, правила 18, 19]. Название метода произошло от расположения множимого и множителя. Поясним данное правило на примере: перемножим 1296 на 21. Множимое 1296 располагается под множителем 21 следующим образом:

```
  21            21
1296    или    1296
```

Первое расположение соответствует прямому порядку умножения, при котором операция начинается с единиц множимого, второе — обратному порядку, при котором операция начинается с высшего разряда множимого. Умножение будем производить в прямом порядке. Единицы множимого 6 умножим на единицы множителя 1, получим 6. Записываем 6 под единицами множителя. Затем умножим единицы множимого 6 на десятки множителя 2, получим 12. Записываем 2 на месте 6, так как она в дальнейших выкладках не участвует, а 1 записываем под 9. Имеем

```
   21
12926
   1
```

Передвигаем множитель на одно место влево:

```
  21
12926
   1
```

Затем умножим 9 на 21. $9 \cdot 1 = 9$, сложенное с 2, стоящими под единицами множителя, дает 11; стираем 2 и на ее месте записываем 1, а 1, стоящую на месте десяток, складываем с 1, стоящей под 9:

```
  21
12916
   2
```

Умножим 9 на десятки множителя 2 и сложим с 2, стоящей под 9, получим 20. Так как 9 больше не участвует в умножении, ее стираем и на месте 9 записываем 0, а 2 записываем под 2 множимого:

```
 21
12016
 2
```

Передвинем множитель на одно место влево:

```
 21
12016
 2
```

Теперь умножим сотни 2 множимого на множитель: $2 \cdot 1 = 2$. Запишем ее под единицами множителя вместо 0; $2 \cdot 2 = 4$, сложим с 2, записанной в третьей строке, сумму 6 запишем на месте сотен множимого:

```
  21
16216
```

Передвинем множитель на одно место влево:

```
 21
16216
```

Умножим тысячи множимого 1 на 21; $1 \cdot 1 = 1$, складываем с 6, стоящей под единицами множителя, и записываем под единицами множителя вместо 6; $1 \cdot 2 = 2$. Записываем под десятками множителя вместо 1, получим

```
21
27216
```

Так как множитель больше не нужен, стираем его. Окончательный результат 27 216. Подобным способом производится умножение в обратном порядке, при этом множитель передвигается вправо.

Метод кавата-сандхи вместе с десятичной позиционной системой перешел в арабоязычную и европейскую математическую литературу. Он встречается в работах Хорезми, ан-Насави (X—XI вв.), ал-Каласади (XV в.) и многих других ученых.

Метод умножения татстха создан как бы в противовес основному способу умножения, при котором множитель передвигается с одного места на другое. При методе татстха, множитель неподвижен, что следует из правила, данного Шридхарой: «Когда [множитель] неподвижен, то [такой способ] умножения называется татстха» [33, правила 18, 19]. Проиллюстрируем этот способ примером умножения 9576 на 4213:

$$
\begin{aligned}
3\cdot 6 &= 1\underline{8}\\
1+7\cdot 3+6\cdot 1 &= 2\underline{8}\\
2+5\cdot 3+7\cdot 1+6\cdot 2 &= 3\underline{6}\\
3+9\cdot 3+5\cdot 1+7\cdot 2+6\cdot 4 &= 7\underline{3}\\
7+9\cdot 1+5\cdot 2+7\cdot 4 &= 5\underline{4}\\
5+6\cdot 2+5\cdot 4 &= 4\underline{3}\\
4+9\cdot 4 &= \underline{4}\,\underline{0}
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{r}
9\,576\\
\times\ 4\,213\\
\hline
40\,343\,688
\end{array}
$$

Подчеркнутые цифры относятся к искомому результату. Этот метод от математиков арабоязычных стран перешел в Европу, где появился в работе Луки Пачоли (XV—XVI вв.) «Сумма» и был отмечен как «более причудливый и изобретательный, чем все другие» [54, т. 1, с. 146].

Методы умножения, называемые рупавибхага и стханавибхага, основаны на том, что множимое или множитель разбивается на несколько слагаемых таким образом, чтобы было легче производить умножение. В способе рупавибхага сомножители разбиваются произвольно, например:

$$1\,296\cdot 21 = (725 + 571)\cdot 21 = 725\cdot 21 + 571\cdot 21 = \\ = 15\,225 + 11\,991 = 27\,216.$$

В способе умножения стханавибхага надо последовательно умножать единицы, десятки, сотни и т. д., а полученные результаты сложить, например:

$$1\,296\cdot 21 = (1000 + 200 + 90 + 6)\cdot 21 = 21\,000 + 4\,200 + \\ + 1890 + 126 = 27\,216.$$

Правило умножения, приведенное Магавирой, таково: «Раздели множимое на его делитель и умножь на [этот делитель] множитель; или раздели множитель на его делитель и умножь на [этот делитель] множимое; или следует перемножить [последовательно] делители множимого и множителя» [11, с. 102]. Эти способы, порой упрощающие выкладки, покажем на примерах

$$145\cdot 16 = \frac{145}{5}\cdot 5\cdot 16 = 29\cdot 80 = 2320,$$

$$125\cdot 24 = 25\cdot 5\cdot 6\cdot 4 = 100\cdot 30 = 3000.$$

Метод ишта Бхаскара II описывает следующим образом: «Умножай на множитель, уменьшенный или увеличенный на произвольное число, прибавляя или вычитая произведение множимого на произвольное число» [36, с. 5—6].

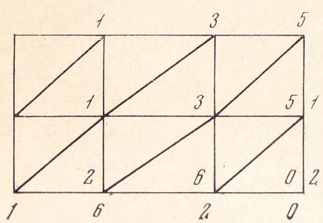
Произвольное число подбирается таким, чтобы облегчить умножение:

$$135 \cdot 12 = 135 \cdot (12 + 8) - 135.8 = 2700 - 1080 = 1620$$

$$135 \cdot 12 = 135 \cdot (12 - 2) + 135 \cdot 2 = 1350 + 270 = 1620.$$

Этот способ умножения получил свое дальнейшее распространение в работах арабоязычных математиков, например у Бехаэддина (XVI—XVII вв.), а также у средневековых немецких математиков, в том числе у Видмана (XV в.) и Ризе (XVI в.).

«Метод решетки» описан Ганешей; возьмем пример из его комментариев к «Лилавати»: умножить 135 на 12. Множимое, множитель и произведение расположены следующим образом [34, с. 126].



Этот метод, по-видимому, попал в Индию от ученых арабоязычных стран, так как он встречается в математической литературе этих стран с конца XIII в., например в работе ал-Каласади. В Европе этот метод найден в работах Пачоли и в «Тревизской арифметике». Интересно отметить, что им пользовались также в одной из китайских арифметических работ в конце XVI в.

Способ умножения стхана-кханда означает умножение на отдельные части и основывается на отделении значащих цифр множимого или множителя. Он упоминается во всех работах начиная с трудов Брахмагупты. Описание этого метода, данное Бхаскарой II, таково: «Умножь отдельно на цифры [стоящие на разных разрядах] и результаты сложи» [36, с. 6]. Это правило иллюстрируется уже известным примером умножения 135 на 12, который комментаторы «Лилавати» решают таким способом:

1)
$$\begin{array}{r} 135 \\ 12 \\ \hline 12 \\ 36 \\ 60 \\ \hline 1620 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{lll} 12 & 12 & 12 \\ 1 & 3 & 5 \\ \hline 1260 & & \\ 36 & & \\ \hline 1620 & & \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{rr} 135 & 135 \\ 1 & 2 \\ \hline & 270 \\ & 135 \\ \hline & 1620 \end{array}$$

Метод гомутрика впервые описан Брахмагуптой. Он столь же часто применялся, как и способ стхана-кханда. Поясним его на примере, приведенном Притхудакасвами (IX в.) — комментатором Брахмагупты. Для умножения 1 223 на 235 комментатор располагает сомножители следующим необычным образом:

$$\begin{array}{ll} 2 & 1223 \\ 3 & 1223 \\ 5 & 1223 \end{array}$$

Множимое последовательно умножается на 2, 3, 5, причем, по индийской традиции, цифры множимого постепенно стираются, а если действие выполняется на бумаге, то зачеркиваются и на их месте записывается произведение

$$\begin{array}{l} 2446 \\ 3669 \\ 6115 \\ \hline 287405 \end{array}$$

Методы умножения по частям также восходят к Брахмагупте; они основаны на том, что множимое разбивается на отдельные слагаемые, при этом множитель умножается на эти слагаемые и произведения складываются; либо на отдельные слагаемые раскладывается множитель, тогда на сумму умножается множимое и результаты также должны быть сложены.

Деление. Общие термины деления — «бхагахара», «бхаджана», «харана», «чхедана» и т. д. Все они имеют значения «разбить на части», «разделить на части», за исключением термина «харана», который означает «убирать», «отнимать». Этот термин указывает на связь между делением и вычитанием.

Среди европейских ученых даже в XV—XVI вв. деление считалось трудной и утомительной операцией. Но в Индии эта операция не принадлежала к разряду трудоемких, так как с самого начала были выработаны довольно удобные способы деления. Действительно, индийские математики не уделяли большого внимания этой операции, поскольку не считали ее трудной. Ариабхата не приводит правил деления в своей работе, но, так как он дает методы извлечения квадратного и кубического корней, можно с уверенностью сказать, что деление было ему довольно хорошо известно. Большинство последователей Ариабхаты, в том числе Брахмагупта, Шрипати, в своих сиддхантах также не описывают правила деления.

До создания десятичной позиционной системы счисления деление, по-видимому, производилось методом отбрасывания общих множителей. Такое правило приведено в одном из сочинений II в., а позднее в работе Магавиры. Правило деления целых чисел кратко дано Шридхарой: «Сократив делитель и делимое на общий множитель, если это возможно, надо последовательно производить деление в обратном порядке» [33, правило 22]. Поясним метод деления на примере: разделить 27 216 на 21. Расположим:

27216
21

Сократив делимое и делитель на 3, получим

9072
7

Процесс деления начинаем со старшего разряда. Разделим 9 на 7, частное равно 1; поместим его над делимым, а разность 9—7 = 2 запишем вместо 9. Получим

1
2072
7

Передвинем делитель на одно место вправо:

1
2072
 7

Разделим 20 на 7, частное равно 2. Поместим его над делимым рядом с предыдущим частным, а разность 20—14 = 6 запишем вместо 20:

12
 672
 7

Передвинем делитель на одно место вправо:

12
 672
  7

Разделим 67 на 7, частное есть 9. Запишем его рядом с прежними частными, а разность 67—63 = 4 запишем вместо 67:

129
 42
 7

Передвинем делитель на одно место вправо:

129
 42
  7

Разделим 42 на 7, частное — 6, запишем его. Так как остаток от вычитания 42—6·7 = 0, то деление окончено. Стираем делитель. Частное равно 1296.

Способ деления вместе с системой счисления перешел в математическую литературу ученых арабоязычных стран и встречается в работах Хорезми, ан-Насави и других ученых, а позднее он был известен в Европе под названием «метод перечеркивания».

Возведение в квадрат. Санскритский термин для квадрата — «варга», «крити». Слово «варга» — «ряды», «группа» (одинаковых предметов), но в математике обычно варга означает «вторую степень», «квадратную фигуру» и «площадь квадрата». Так, Ариабхата пишет: «Квадратная фигура из четырех равных сторон и [число, соответствующее ее] площади, называется варга. Произведение двух равных количеств также есть квадрат» [часть II, правило 3]. Термин „крити“ дословно переводится как «действие».

Ариабхата не приводит правила возведения чисел в квадрат, хотя, несомненно, знал его, так как использует правило извлечения квадратного корня. Впервые метод возведения в квадрат был кратко описан Брахмагуптой и несколько подробнее Магавирой. Аналогичные правила имеются у Бхаскары II, Нарайаны. Брахмагупта и Бхаскара II отмечают, что процесс можно начинать как со старшего разряда, так и с единиц. Основной способ возведения в квадрат Магавира формулирует так: «Возведя в квадрат последнюю [цифру], умножь оставшиеся цифры на удвоенную последнюю, которая сдвинута на [одно позиционное место]. Передвинув оставшиеся цифры, продолжим операцию. Это дает квадрат числа» [11, с. 102]. Проиллюстрируем способ возведения в квадрат примером: чему равен квадрат 432? Процесс начинается с высшего разряда. Возведем в квадрат 4 и результат поместим над числом:

```
16
432
```

Удвоенную последнюю цифру $2 \cdot 4 = 8$ умножим на оставшиеся цифры, т. е. на 32, поместим 8 под числом, а 4 сотрем, так как она в дальнейших выкладках не участвует:

```
16
 32
 8
```

Произведя умножение и стерев 8, получим

```
1856
 32
```

Передвинем оставшиеся цифры на одно место вправо:

```
1856
  32
```

Один цикл окончен. Возводим в квадрат последнюю цифру, т. е. 3, и прибавим к верхнему числу

```
1865
  32
```

Удвоенную последнюю цифру $3 \cdot 2 = 6$ умножим на оставшиеся, т. е. 2, стерев 3, имеем

```
1865
   2
   6
```

Произведя умножение и стерев 6, получим

```
18662
   2
```


Передвинем оставшиеся цифры на одно место вправо:

```
18662
    2
```

Окончен второй цикл. Возведем в квадрат последнюю цифру:

```
186624
    2
```

Так как оставшихся цифр больше нет, то процесс окончен. Окончательный результат 186 624.

Кроме этого основного метода индийские математики приводят другие способы возведения в квадрат, основанные на следующих формулах:

$$n^2 = n \cdot n,$$

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1),$$

$$n^2 = (n - a)(n + a) + a^2,$$

$$n^2 = (a + b)^2 = (a - b)^2 + 4\,ab.$$

Метод возведения в квадрат путем простого перемножения, как и другие правила, встречается у большинства индийских авторов, в том числе у Брахмагупты, Магавиры, Бхаскары II, Нарайаны. Кроме этих правил в работах индийских математиков даны другие правила возведения в квадрат, основанные на иных формулах; так, Брахмагупта приводит формулу

$$n^2 = (p + q)^2 = (2p + q)\,q + p^2,$$

Магавира

$$(a + b + \ldots + e + d)^2 = a^2 + b^2 + \ldots + 2ab + \ldots \ldots + 2\,ed,$$

Бхаскара II

$$n^2 = (p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2,$$

Нарайана

$$n^2 = (p + q)^2 = (p - q)^2 + 4\,pq.$$

Извлечение квадратного корня. Санскритские термины корня — «мула» и «пада». Эти термины, по-видимому, являются переводом греческих слов «базис» — «основание» или «плевра» — «сторона». Но слово «мула» имеет также значение «корень растения». Термин «пада» приводится впервые Брахмагуптой. Арабские переводчики индийских сиддхант перевели в VIII в. термин «мула» словом «джизр», также имеющим значение «корень растения». В XII в. арабское название корня перешло в латинский язык — «radix», откуда и происходят термины «корень» и «радикал».

Описание метода извлечения квадратного корня впервые встречается у Ариабхаты, правда, в очень сжатой форме. Более подробно описание этого метода дали Магавира и Шридхара. То же правило приведено Ариабхатой II, Шрипати, Бхаскарой II, Нарайаной. Вместе с позиционной системой счисления способ извлечения квадратного корня употреблялся в арабской литературе, где встречается, например, у ан-Насави, а затем перешел в Западную Европу.

Правило извлечения квадратного корня, данное Ариабхатой, гласит: «Следует всегда разделить четное позиционное место на удвоенный квадратный корень [предшествующего] нечетного позиционного места; вычтя из нечетного позиционного места квадрат [частного], частное следует поместить [на линии квадратного корня]. Это дает корень» [часть II, правило 4]. Поясним это правило на примере: нужно извлечь квадратный корень из 186 624. Разобьем число, начиная с единиц, на четные и нечетные места, обозначая их буквами; ч — четные, н — нечетные:

ч н ч н ч н
1 8 6 6 2 4

Операцию начинают с последнего нечетного места, т. е. с 18. Вычтем наибольший квадрат, т. е. 16. Разность $18-16 = 2$ запишем вместо 18, а удвоенный квадратный корень, т. е. $2\cdot 4 = 8$, запишем под следующим четным местом:

н ч н ч н
2 6 6 2 4
  8 (линия удвоенного квадратного корня).

Разделим 26 на 8 и поместим 3 на линии удвоенного квадратного корня, а остаток 2 запишем вместо 26. Получим

ч н ч н
2 6 2 4
8 3 (линия удвоенного квадратного корня).

Вычтя квадрат частного 9 из нечетного места 26, поместим удвоенное частное 6 на линии удвоенного квадратного корня вместо частного:

ч н ч н
1 7 2 4
8 6 (линия удвоенного квадратного корня).

Один цикл операции окончен. Передвигаем 86 на одно место вправо:

ч н ч н
1 7 2 4
  8 6 (линия удвоенного квадратного корня).

Разделим 172 на 86, напишем частное 2 на линии корня, а 172 сотрем, поскольку разность $172-86\cdot 2 = 0$. Имеем

н ч н
    4
8 6 2 (линия удвоенного квадратного корня).

Вычтя квадрат частного 4 из нечетного места 4, поместим удвоенное частное 4 на линии корня вместо частного, получим

н ч н
    0
8 6 4 (линия удвоенного квадратного корня).

Процесс окончен. Остается раздвоить линию корня, чтобы получить окончательный результат 432.

Возведение в куб. Санскритский термин для куба — «гхана»— встречается во всех математических работах. Он также обозначает кубическую фигуру. Так, Ариабхата пишет: «Произведение трех равных [величин], а также геометрическое тело, имеющее двенадцать [равных] ребер, называется гхана» [часть II, правило 3]. Правило возведения целых чисел в куб у Шридхары гласит: «Запиши куб «последнего», на следующем месте квадрат «последнего», умноженный на утроенное «предыдущее», [на следующем месте запиши] квадрат «предшествующего», умноженный на «последнее» и на 3, затем [на следующем месте запиши] куб «предшествующего»; [полученный] куб «смешанного» числа [будем теперь рассматривать] как «последнее». [Куб есть] произведение трех равных чисел, или куб данного числа без единицы, сложенный с единицей и с утроенным произведением числа на число без единицы» [33, правила 27, 28]. Например, нужно возвести в куб 256. Процесс начинается с высшего разряда. Вначале будем считать в качестве «последнего» 2, а в качестве «предшествующего» 5. Запишем куб «последнего» 8, а на следующем месте квадрат «последнего», умноженный на утроенное «предшествующее»: $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$; на следующем месте квадрат «предшествующего», умноженный на утроенное «последнее»: $5^2 \cdot 3 \cdot 2 = 150$; на следующем месте куб «предшествующего» 125, получаем

$$
\begin{array}{r}
8\\
60\\
+\ 150\\
125\\
\hline
15625
\end{array}
$$

Это есть 25^3. Теперь в качестве «последнего» будем считать 25, а в качестве «предшествующего» 6. Имеем

$$
\begin{array}{rr}
25^3 = & 15\,6\ \ 25\\
25^2 \cdot 3 \cdot 6 = & 1\,1\ \ 250\\
25 \cdot 3 \cdot 6^2 = & 2700\\
6^3 = & 216\\
\hline
 & 16\,7\ \ 77\,216
\end{array}
$$

Это правило основано на применении формулы

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Другие способы возведения чисел в куб основаны на применении таких формул:

$$n^3 = n \cdot n \cdot n,$$

$$n^3 = (n - 1)^3 + 3n\,(n - 1) + 1,$$

$$n^3 = n\,(n + p)\,(n - p) + p^2(n - p) + p^3,$$

$$n^3 = n + 3n + 5n + \ldots + (2n - 1)\,n,$$

$$n^3 = n^2 + (n - 1)[1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)],$$

$$n^3 = 3\,[1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n - 1)\,n] + n = \sum_{k=1}^{n} 3k\,(k + 1) + n,$$

$$n^3 = (a + b)^3 = 3\,(a^2b + ab^2) + a^3 + b^3.$$

Ариабхата не описывает метод возведения в куб, хотя он был ему, несомненно, известен, так как в «Ариабхатии» имеется правило извлечения кубического корня. Впервые правило возведения в куб приведено кратко Брахмагуптой и несколько подробнее Магавирой, Шридхарой, Шрипати, Бхаскарой II, Нарайаной.

Извлечение кубического корня. Санскритские термины для кубического корня —«гхана мула» или «гхана пада». Первое весьма лаконичное описание извлечения кубического корня встречается у Ариабхаты. Затем правило более подробно сформулировано Брахмагуптой, Магавирой, Шридхарой, Ариабхатой II, Шрипати, Бхаскарой II, Нарайаной. Правило извлечения кубического корня из целых чисел Ариабхата формулирует так: «Разделим второе «некубическое» место на утроенный квадрат кубического корня; вычтем из первого «не кубического» места квадрат частного, умноженный на утроенный предшествующий [кубический корень]; вычтем куб [частного] из «кубического» места. [Это кубический] корень» [часть II, правило 5].

Проиллюстрируем данное правило примером извлечения кубического корня из 277 167 808. Разобьем число на одно «кубическое» и два «некубических» места, обозначая их буквами: к — кубическое и н — некубическое:

н н к н н к н н к
2 7 7 1 6 7 8 0 8

Процесс извлечения кубического корня начинается с высшего разряда. Из последнего «кубического» места 277 вычтем наибольший возможный куб 216; кубический корень 6 поместим под третьим местом справа от последнего «кубического» места. Разность 277—216 = 61 поместим вместо 277, имеем

н н к н н к н н к
6 1 1 6 7 8 0 8
6 (линия кубического корня).

Разделим на утроенный квадрат кубического корня ($3 \cdot 6^2 = 108$) число, стоящее над кубическим корнем влево без последней цифры (611). Частное 5 поместим на линии кубического корня, а разность 611—540 = 71 запишем вместо 611, имеем

н н к н н к н н к
7 1 6 7 8 0 8
6 5 (линия кубического корня).

Теперь частное 5 будем считать «первым», а кубический корень 6—«последним». Вычитаем квадрат «первого», умноженный на утроенное «последнее» $3 \cdot 6 \cdot 5^2 = 450$, из числа, стоящего над частным влево без последней цифры, 716, разность 716—450 = 266 поместим вместо 716, получим

н н к н н к н н к
2 6 6 7 8 0 8
6 5 (линия кубического корня).

Куб «первого» $5^3 = 125$ вычтем из числа, стоящего над ним влево, 2667, разность 2667—125 = 2542 запишем вместо 2667. Имеем

н н к н н к н н к
2 5 4 2 8 0 8
6 5 (линия кубического корня).

Один цикл окончен. Теперь снова поместим кубический корень 65 на третье место справа от последнего «кубического» места, имеем

н н к н н к н н к
2 5 4 2 8 0 8
6 5 (линия кубического корня).

Разделим на утроенный квадрат кубического корня $3 \cdot 65^2 = 12\,675$ число, стоящее над кубическим корнем влево без последней цифры, 25 428. Частное 2 поместим на линии кубического корня, а разность $25\,428 - 12\,675 \cdot 2 = 25\,428 - 25\,350 = 78$ поместим вместо 254 28, имеем

н н к н н к н н к
7 8 0 8
6 5 2 (линия кубического корня).

Теперь будем считать частное 2 «первым», а кубический корень 65 «последним». Вычтем квадрат «первого», умноженный на утроенное «последнее» $3 \cdot 65 \cdot 2^2 = 780$, из числа, стоящего над частным влево без последней цифры, 780,

разность 780—780 = 0 поместим вместо 780:

н н к н н к н н к
8
6 5 2 (линия кубического корня).

Куб «первого» $2^3 = 8$ вычтем из числа, стоящего над ним влево 8, разность 8—8 = 0 поместим вместо 8:

н н к н н к н н к
0
6 5 2 (линия кубического корня).

Второй цикл окончен. Так как больше чисел нет, кубический корень равен 652.

Действия с дробями. Санскритское название дроби — «бхинна», что означает «разбитый», «разрушенный», «сломанный». Это слово было переведено дословно на латынь как fractus или ruptus, а отсюда произошли и термины дроби во многих европейских языках: fractio, fraction, roupt, rotto, rocto.

Иногда для дроби употреблялись и другие термины — «бхага», «амша», т. е. «часть», «доля». Эти же термины означают дроби с числителем, равным единице: 1/15—«панчадаша-бхага», дословно «пятнадцатая часть», «пятнадцатая доля»; 1/7—«сапта-бхага»—«седьмая часть», «седьмая доля». Первые дроби встречаются в ведах. В них нет еще единообразного обозначения дробей, в основном это единичные дроби, причем каждая дробь имеет свое собственное наименование. Так, дробь 1/2 называется «ардха», 1/16—«кала», 1/12—«куштха», 1/8—«шапха», 1/4—«пада». Обозначения для дробей 1/2, 1/4, 1/16 имеются у Ариабхаты и во многих других математических сочинениях.

Специальные знаки и названия для основных дробей были и у других народов. Так, например, в древней китайской математике дроби 1/2, 1/3, 2/3 назывались соответственно «бань»— половина, «шао-бань»— малая половина, «тай-бань»— большая половина и обозначались специальными иероглифами. В греческой математике для дробей $^1/_2$, $^2/_3$ также есть специальные символы.

Индийцы записывали дроби так, как это делается и в настоящее время: числитель над знаменателем только без разделительной черты. Друг от друга дроби отделялись вертикальными и горизонтальными линиями. Например, дробь $\frac{a}{b}$ записывалась так:

$$\begin{array}{|c|}\hline a \\ b \\ \hline\end{array}$$

Знака «+» не существовало, запись дробей рядом соответствовала сложению. Например, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$ записывалась так:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & c & e \\ b & d & f \\ \hline\end{array}$$

Для обозначения вычитания над вычитаемым ставилась точка или после него стоял знак «+». Так, выражение $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}-\frac{e}{f}$ изображалось следующим образом:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & \dot{c} & e+ \\ b & d & f \\ \hline\end{array}$$

В смешанной дроби целая часть писалась над дробью; дробь $a\,\frac{b}{c}$ записывалась

$$\begin{array}{|c|}\hline a \\ b \\ c \\ \hline\end{array}$$

Иногда целое число изображали дробью со знаменателем, равным единице. Поэтому смешанную дробь можно было записать и так:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ 1 & c \\ \hline\end{array}$$

В индийской системе записи дробей можно было, не производя вычислений, записать значения

$a-\frac{b}{c}$ или $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ в виде

$$\begin{array}{|c|c|}\hline a & \dot{b} \\ 1 & c \\ \hline\end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline a & \dot{c} \\ b & d \\ \hline\end{array}$$

Поэтому многие задачи и примеры содержат подобные выражения. Над дробями производились те же основные действия, что и с целыми числами: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в квадрат и куб, извлечение квадратного и кубического корней. В наиболее ранней математической работе «Шульба-сутра» уже встречаются дроби в решении задач. В «Бахшалийской рукописи» имеются все операции с дробями, хотя нет описаний правил действий. Ариабхата также не дает правил, в которых бы формулировались действия с дробями, но некоторые действия, как, например, деление дробей, есть в его трактате. Правила основных действий с дробями, за исключением возведения в куб и извлечения кубического корня, приведены Брахмагуптой, а правила всех основных действий даны Магавирой, Шридхарой, Ариабхатой II, Шрипати, Бхаскарой II, Нарайаной.

От индийцев дроби перешли вместе с позиционной ситемой счисления в математику арабоязычных стран, где была введена дробная черта, но она употреблялась не всеми математиками. Такое двоякое написание дробей с чертой и без нее сохранилось и в европейских математических руководствах.

Хотя Ариабхата не приводит специальных правил действий с дробями, он упоминает методы умножения и деления дробей при выполнении следующих действий:

$$\frac{\frac{a}{b}\,\frac{c}{d}}{\frac{m}{n}}$$

Правило гласит: «Знаменатели множителей и делителей следует перемножить совместно. Необходимо умножить числители и знаменатели на другие знаменатели, чтобы привести дроби к общему знаменателю» [часть II, правило 27]. Согласно комментатору Сурьядеве, эти дроби записываются следующим образом:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline a & m \\ b & n \\ \hline c & \\ d & \\ \hline\end{array}$$

Преобразовав знаменатели, имеем

a	m
n	b
c	d

Выполнив умножение, получим результат $\frac{anc}{mbd}$.

Во второй части правила отмечается, что в качестве общего знаменателя следует брать произведение знаменателей. У Брахмагупты общим знаменателем служит произведение всех знаменателей. Он пишет: «Умножением числителя и знаменателя каждой дроби на другие знаменатели можно привести дроби к общему знаменателю» [54, т. 1, с. 189]. В «Тришатике» Шридхара рекомендует находить общий знаменатель путем умножения всех знаменателей. Он пишет: «Чтобы привести дроби к общему знаменателю, умножь числитель и знаменатель каждой дроби на другие знаменатели» [Там же, 190]. Впервые в индийской математике понятие общего наименьшего кратного встречается у Магавиры. Он вводит термин «нирудха», определяя его как «произведение общих множителей среди знаменателей». Правило для приведения дробей к общему знаменателю следующее: «Новые числители и знаменатели, полученные умножением каждого первоначального числителя и знаменателя на частное от деления общего наименьшего кратного на знаменатель, дают дроби с одинаковым знаменателем» [11, с. 104]. Бхаскара II не упоминает общее наименьшее кратное, но отмечает, что процесс приведения к общему знаменателю может быть сокращен. Он пишет: «Числитель и знаменатель могут быть умножены разумным вычислителем на другой знаменатель, сокращенный на общий множитель». В древнекитайском трактате III в. «Математика в девяти книгах» [54] отсутствует правило, в котором в качестве знаменателя суммы дробей бралось бы общее наименьшее кратное. Более того, согласно правилу книги I, в качестве общего знаменателя надо было брать произведение знаменателей слагаемых. Однако в книге IV приходится сталкиваться с задачами I—II, в которых в большинстве случаев в качестве общего знаменателя берется общее наименьшее кратное. В этих задачах необходимо последовательно сложить дроби $1+\frac{1}{2}$; $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$; . . .;

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{12}$. Знаменателями берутся числа: 2, 6, 12, 60, 120, 420, 840, 2520, 2520, 27 720, 83 160, которые, кроме двух —120 и 83 160, являются общими наименьшими кратными. Современное правило приведения к общему знаменателю берет начало в арабоязычных странах у Абу-л-Вафы (X в.), а в Европе — у Леонардо Пизанского (XIII в.).

Правило трех величин. Центральное место в арифметической части всех трактатов занимает правило трех величин, которое заключается в нахождении числа x, образующего с тремя данными числами a, b, c пропорцию

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}.$$

Словесно это правило формулируется так: если a порождает b, что порождает c?

Санскритский термин правила трех величин — «трайрашика», дословно означающий «три члена», «три места», которые чаще всего имеют названия: данное — a, результат — b, требуемое — c. Иногда их просто называют: первый, второй, третий или первый, средний, последний. К применению этого правила сводились многие задачи. Индийцы дали специальные названия трем членам пропорции, да и сам термин «правило трех величин» был введен ими.

Впервые правило трех величин появилось у Ариабхаты, а затем во всех математических трактатах. О происхождении этого правила Бхаскара I в комментариях к «Ариабхатии» пишет: «Здесь для вычисления необходимы три количества, поэтому и правило называется «трайрашика» («правило трех величин»)» [54, т. 1, с. 204].

Правило трех величин от индийцев перешло в арабоязычную и западноевропейскую математическую литературу. Хотя индийские названия отсутствуют, было сохранено расположение членов в линию и размещение их таким образом, чтобы первый и последний члены были однородными. Задачи на это правило встречаются в трудах Хорезми, ал-Караджи (X—XI вв.), Бехаэддина (XVI—XVII вв.), а также у Леонардо Пизанского и во многих европейских арифметических руководствах; это правило было названо «золотым правилом». Интересно отметить, что Бируни написал специальный трактат «Об индийских рашиках» [4, 28].

Типы задач относящиеся к правилу трех величин, несомненно, были известны и в других странах — в Китае, Греции, Египте, но лишь в Индии это правило было выделено особо, были сформулированы особые методы решения и оно было распространено для случаев пяти, семи и т. д. величин.

Правило, приведенное Ариабхатой, гласит: «В правиле трех величин умножь результат на требуемое и раздели на данное. Получим результат, соответствующий требуемому» [часть II, правило 26]. Примеры у Ариабхаты отсутствуют, они даны последующими математиками. Например, Шридхара задачу: «Если $1^1/_3$ пала черного перца стоит $1^1/_4$ пана, то быстро скажи, какое количество черного перца можно купить за 10 без $^1/_3$ пана» [33, пример 26] решает так: «Расположим числа в соответствии с формой записей дробей:

1	1	10
1	1	1+
4	3	3

Превратив в неправильные дроби, умножим требуемое на результат и разделим на данное, получим 10 в остатке $^{14}/_{15}$. Для выражения в карша умножим на 4, получим 1 какини, $^{11}/_{45}$ остаток. Для выражения в маша умножим на 16, получим 3 маша и остаток $^{41}/_{45}$. Для выражения в гунджа умножим на 5, получим 4 гунджа, остаток $^{25}/_{45}$, или после сокращения $^5/_9$. Ответ: 10 пана 1 карша 3 маша $4^5/_9$ гунджа». Как видно, индийский комментатор больше уделяет внимания действиям с именованными числами, чем самому решению задачи.

Обратное правило трех величин. Санскритский термин для обратного правила трех величин —«вйаста трайрашика». Это правило применяется к задачам, в которых «данное» обратно пропорционально «требуемому», т. е. правило заключается в нахождении x, образующего с данными числами a, b, c пропорцию

$$\frac{a}{c}=\frac{x}{b}.$$

Правило, приведенное Шридхарой, гласит: «При изменении единицы измерения среднее [количество] умножается на первое [количество] и делится на последнее [количество]» [33, правило 44б]. От индийцев это правило перешло

в арабскую и западноевропейскую математическую литературу.

Проиллюстрируем это правило на примере, взятом из трактата «Патиганита»: «Сколько золота пробой 11 варна можно получить в обмен на 168 суварна золота пробой 16 варна» [33, пример 36]. Индийский комментатор решает это правило так: «Расположим числа

16 | 168 | 11

Умножим первый член 16 на 168, произведение 2688 разделим на третий член 11, окончательно получим 244 суварна 5 маша 4 $^1/_{11}$ гунджа».

Сложная пропорция. Правила пяти, семи, девяти величин представляют собой частные случаи сложной пропорции. Санскритские термины для сложной пропорции — «панча-рашика» (правило пяти величин), «сапта-рашика» (правило семи величин), «нава-рашика» (правило девяти величин) и т. д.

Правило пяти величин заключается в нахождении неизвестной x, которая образует с пятью известными величинами сложную пропорцию

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d}=\frac{x}{e}.$$

Правило семи величин заключается в нахождении неизвестной x, которая образует с семью известными величинами сложную пропорцию:

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d}\frac{e}{f}=\frac{x}{g}.$$

Аналогично определяются правила девяти, одиннадцати величин. Иногда все эти правила называются правилами нечетного числа членов.

Сложная пропорция была известна уже Ариабхате, хотя он приводит только правило трех величин. Бхаскара I в своих комментариях к «Ариабхатии» пишет: «Здесь Ариабхата описал только правило трех. Как же могут быть получены хорошо известные правила пяти, семи и т. д.? Я рассуждаю так: Ариабхата описал только основы пропорции. Все другие виды пропорции, такие, как правила пяти, семи и т. д., следуют из этого основного правила пропорции. Правило пяти состоит из двух правил трех, правило семи — из трех правил трех и так далее» [54, т. 1, с. 211]. Правило, приведенное Шридхарой, таково: «После перестановки результата [из одной] стороны в другую следует [также] поменять местами знаменатели. Перемножив [полученные в каждой стороне] числа, следует разделить сторону с большим числом [числителей] на другую сторону» [33, правило 45].

Это правило покажем на примере: «Со $100^1/_2$ прибыль за $^1/_3$ месяца [составит] $1^1/_2$; какова будет прибыль с $60^1/_4$ за 8 без $^1/_2$ месяцев?» [33, пример 40]. Этот пример комментатором решается таким образом.

Две стороны следующие: сторона данного

$$\frac{1}{3},$$

$$100\frac{1}{2}=\frac{201}{2},$$

$$1\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

сторона требуемого

$$8-\frac{1}{2}=\frac{15}{2},$$

$$60\frac{1}{4}=\frac{241}{4}.$$

По индийскому образцу это записывается так:

1	15
3	2
201	241
2	4
3	0
2	

Знак «0» означает неизвестное количество. Для решения переставим каждый результат из одной стороны в другую:

1	15
3	2
201	241
2	4
0	3
	2

Затем переставим знаменатели:

1	15
2	3
201	241
4	2
0	3
2	

Так как количество числителей в правой части больше количества числителей в левой, то разделим произведение числителей и знаменателей в правой части на произведение числителей и знаменателей в левой части:

$$\frac{241\cdot 2\cdot 15\cdot 3\cdot 3}{201\cdot 4\cdot 1\cdot 2\cdot 2}=20\frac{125}{536}.$$

Правила сложной пропорции встречаются в работах Леонардо Пизанского, Видмана, Рудольфа (XVI в.).

Алгебра

Одно из санскритских названий алгебры —«авйакта ганита» — «искусство вычисления с неизвестными величинами», в отличие от арифметики, называемой «вйакта ганита» — «искусство вычисления с известными величинами». Индийские ученые считали алгебру очень важной; в начальных строках своего трактата по алгебре Брахмагупта пишет: «Так как проблемы едва ли смогут быть решены без знания алгебры, я изложу алгебру с примерами. Зная метод «распыления», [правила действий] с нулем, отрицательными и положительными количествами, неизвестными величинами, способы приведения к уравнению первой степени, [методы решения] уравнений с одним неизвестным и квадратных уравнений, можно стать знатоком среди обученных» [36, гл. XVIII, правила 1, 2].

Позднее Нарайана отмечает: «Люди порой задают вопросы, которые нельзя разрешить средствами арифметики, но эти решения большей частью можно найти в алгебре. Поскольку менее обученный не имеет успеха в решении вопросов правилами арифметики, я изложу ясно и понятно правила алгебры» [54, т. 2, с. 5].

Алгебраическая символика. Индийская символика в большинстве своем была синкопирующей, т. е. часто встречающиеся понятия обозначались первыми буквами или слогами соответствующих санскритских терминов. Самый распространенный санскритский термин для неизвестной величины — «йават — тават» («столько — сколько», «так много, как»). Он встречается в большинстве индийских трактатов и комментариев. Также широко употребляется термин «авйакта» («неизвестная величина»); он встречается у Брахмагупты, Шрипати, Бхаскары II.

Ариабхата употреблял термин «гулика» («дробинка»). Это название произошло, по-видимому, оттого, что на счетной доске на месте неизвестной величины были помещены маленький камешек или дробинка.

Если неизвестных было несколько, то их обозначали различными цветами или первыми буквами алфавита. Так, Бхаскара II пишет: «В тех примерах, где имеются две, три и более неизвестные величины, их следует обозначать словами, означающими различные цвета. Эти обозначения у предшествующих ученых следующие: йават-тават [столько-сколько], калака [черный], нилака [синий], питака [желтый], лохитака [красный], харитака [зеленый], шветака [белый], читрака [разноцветный], капилака [рыжевато-коричневый], пингалака [красновато-коричневый], паталака [розовый], шавалака [пятнистый], шьямалака [черноватый], мечака [темно-синий] и т. д. Для обозначения неизвестных следует также брать буквы алфавита, начиная с ка, чтобы не допустить путаницы» [36, с. 139].

Символами для неизвестных величин служили санскритские буквы, соответствующие первым слогам этих терминов, т. е. йа для йават-тават, ка — калака, ни — нилака, пи — питака. В «Бахшалийской рукописи», в трактатах Шридхары и некоторых других сочинениях неизвестная величина обозначалась маленьким кружочком. Так, в «Бахшалийской рукописи» выражение $x+2x+3x+$ $+ 4x = 200$ записывается так:

0 1	2 1	3 1	4 1	дришья 200 1

В этом же сочинении встречаются записи, где маленьким кружком обозначаются несколько неизвестных. Напри-

мер, выражение $\sqrt{x+5} = y$ записывается

0	5		0
1	1	му	1

а выражение $\sqrt{x-7} = z$ представлено в виде

0	7+		0
1	1	му	1

В средние века, когда индийские математики имели развитую символику, они продолжали употреблять в качестве знака для неизвестного маленький кружок. Так, в анонимных комментариях, написанных не позднее XII в. к трактату Шридхары «Патиганита», встречаются маленькие кружки для обозначения одного или нескольких неизвестных величин. В комментариях к примерам на арифметическую прогрессию имеется запись:

Первый член	Разность	Число членов	Сумма
2	5	0	0

Столь упорное употребление единственного символа для обозначения нескольких неизвестных можно объяснить тем, что индийцы имели различные символы, которые применяли отдельно в арифметических сочинениях и в алгебраических работах. Маленький кружочек использовался лишь в арифметических работах, тогда как обозначение «йават-тават» встречается и в арифметике и в алгебре. В «Бахшалийской рукописи» имеются и другие способы обозначения неизвестных. В примере, где имеются пять неизвестных, они названы санскритскими порядковыми числительными: пратхама (первый), двитийа (второй), тритийа (третий), чатуртха (четвертый), панчама (пятый), а символами служат первые слоги соответствующих терминов [54, т. 2, с. 17]:

9 пра 7 дви	7 дви 10 три	10 три 8 ча	8 ча 11 пан	11 пан 9 пра	Сумма равна				
					16	17	18	19	20

Эта запись соответствует такой системе уравнений:

$$9x_1 + 7x_2 = 16, \quad 8x_4 + 11x_5 = 19,$$
$$7x_2 + 10x_3 = 17, \quad 11x_5 + 9x_1 = 20.$$
$$10x_3 + 8x_4 = 18,$$

Для обозначения нескольких неизвестных Ариабхата мог употреблять либо цветные дробинки, либо дробинки разных размеров. Брахмагупта называл несколько неизвестных цветами радуги. Он не дал подробного объяснения своему способу обозначения неизвестных, по-видимому, считая его хорошо знакомым. Этот способ был прокомментирован Притхудакасвами, а также Шрипати, Бхаскарой II, Нарайаной.

Терминами для коэффициентов при неизвестных служат санскритские слова «гунана», «пракрити» (множитель), «анка», «самкхйа» (число), «рупа». Символами являются санскритские буквы, соответствующие первым слогам данных терминов, т. е. гу — гунана, пра — пракрити, а — анка, сам — самкхйа, ру — рупа. Степени обозначались сочетанием слогов «ва» (варга — квадрат), «гха» (гхана — куб) и слова «гхата»— произведение:

x^2 = ва, x^3 = гха, x^4 = ва ва, x^5 = ва гха гхата, x^6 = ва гха, x^7 = ва ва гха гхата, x^8 = ва ва ва, x^9 = гха гха.

Мы видим, что для степеней, показатели которых имеют вид 2^α, 3^β, обозначения состоят из слога «ва», повторенного α раз, и слога «гха», повторенного β раз. Таким образом, степени этого вида образуются по мультипликативному принципу. Напротив, названия степеней, показатель которых не дается в таком виде, образуются по аддитивному принципу, причем термин «гхата» означает, что степень такого типа представляет собой произведение степеней, суммой показателей которых является показатель этой степени, например $x^5 = x^{2+3} = x^2x^3$. Следовательно, индийская символика принципиально отличается от символики Диофанта, где названия степеней были основаны на чисто аддитивном принципе.

Эта система обозначения степеней сложилась в конце ведийского периода, в III—II вв. до н. э. Существовала и иная система: вторая степень называлась «пратхамаварга» — «первый квадрат», четвертая степень — «двитияварга»—«второй квадрат», восьмая степень —«тритийаварга»—«третий квадрат». Брахмагупта употребляет более простую систему. Квадрат и куб именуются соответственно «варга» и «гхана», четвертая степень, как раньше, «варгаварга», а затем степени образуются сочетанием порядкового числительного и термина «гата»; так, пятая степень — «панча-гата», шестая степень — «шад-гата».

Квадратный корень обозначался слогами «му»— от слова «мула» или «па»—от «пада». В качестве примеров приведем записи, встречающиеся в «Бахшалийской рукописи»:

1	1		5	
		йу		му
	1		1	

означает $\sqrt{11+5}$,

1	1	7+	
			му
	1	1	

означает $\sqrt{11-7}$.

В ведийский период применялась следующая система обозначения корней: корень второй степени — «пратхаварга-мула» (первый квадратный корень), корень четвертой степени — «двития-варга-мула» (второй квадратный корень) и т. д. Встречаются и более сложные записи, например, «тртия-варга-мула-гхана», т. е. куб третьего квадратного корня, а это $\left[\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}\right]^3$.

В индийских математических работах для обозначения основных действий чаще всего записывался первый слог соответствующего санскритского слова. Так, для сложения применялся слог «йу»— от «йута»—«сложение», для вычитания —«кша» от «кшайа»—«уменьшенный», умножения — «гу» от «гуна» или «гунака»—«умноженный», деления — «бха»—от «бхага» или «бхаджита»—«деленный». Особые знаки имелись только для вычитания — это точка или маленький кружочек, которые помещались над вычитаемым, или маленький крестик, который записывался после вычитаемого, реже — перед ним. Так,—5 обозначалось $\dot{5}$, $\mathring{5}$, 5+, +5. Из символов для четырех действий чаще других употреблялись знаки для вычитания и деления. При сложении и умножении названия действий или записывались полностью, или вообще отсутствовали. В последнем случае о выполнении нужного действия приходилось судить по условию задачи.

В качестве примеров приведем записи из «Бахшалийской рукописи» и из анонимного комментария к «Патиганите» Шридхары:

$$\begin{array}{|c|c|} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{array} \quad \text{для} \quad \frac{x}{1} + \frac{5}{2},$$

$$\begin{array}{|c|l|} 0 & 3\ \text{йу} \\ 1 & 4 \end{array} \quad \text{для} \quad \frac{x}{1} + \frac{3}{4},$$

$$\begin{array}{|cccccc|}\hline 1 & & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & + & 1 & 1 & + & 1\ \text{бха} \\ 2 & & 3 & 4 & & 6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} 36 \\ 1 \\ \hline \end{array}$$

для

$$\frac{36}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{6}\right)},$$

$$\begin{array}{|c|} 40 \\ \quad\text{бха} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} 160 & 13 \\ & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \quad \text{для} \quad \frac{160}{40} \cdot 13\frac{1}{2}.$$

При записи уравнений знак равенства отсутствовал: обе части уравнений располагались одна под другой так, чтобы неизвестная величина и ее квадрат в нижнем ряду стояли под соответствующей неизвестной и ее квадратом верхнего ряда. Если неизвестная величина отсутствовала, то к ней присоединяли коэффициент нуль. Например, линейное уравнение $x + 5 = 20$ записывается следующим образом:

йа 1 ру 5,
йа 0 ру 20,

т. е. $x + 5 = 0x + 20$.

Линейное уравнение $3x + 58 = x + 74$ представлено в виде

йа 3 ру 58,
йа 1 ру 74.

Квадратное уравнение $x^2 + 5x = 20x$ дается как

ва 1 йа 5,
ва 0 йа 20,

т. е. $x^2 + 5x = 0x^2 + 20x$.

Это уравнение записывается в общем виде:

ва 1 йа 15 + ру 0,
ва 0 йа 0 ру 0,

т. е. $x^2 - 15x + 0 = 0x^2 + 0x + 0$.

Хотя математическая символика не была совершенной и сами символы, т. е. соответствующие санскритские буквы, имели сложное начертание, все же индийцы в развитии символики сделали большой шаг вперед.

Отрицательные числа и правила действий с ними. У Ариабхаты действия с отрицательными числами отсутствуют, но Брахмагупта и другие ученые начали систематически пользоваться отрицательными числами. Правило сложения Брахмагупта формулирует так: «Сумма двух положительных чисел положительна, сумма двух отрицательных чисел отрицательна, сумма положительного и отрицательного чисел есть их разность» [36, гл. XVIII, правило 30].

Правило вычитания таково: «Из большего [числа] следует вычесть меньшее, [окончательный результат] будет положительным, если [вычесть] положительное [число] из положительного, и отрицательный, если [вычесть] отрицательное [число] из отрицательного. Если, однако, приходится вычитать из меньшего [числа] большее, то [знак] разности меняется на обратный, отрицательное становится положительным, а положительное отрицательным. Когда положительное [число] вычитается из отрицательного или отрицательное из положительного, тогда их надо сложить вместе» [там же, правила 31, 32].

Правила умножения и деления таковы: «Произведение положительного и отрицательного [чисел] — отрицательно, двух отрицательных чисел — положительно, двух положительных — положительно. Положительное, деленное на положительное, или отрицательное, деленное на отрицательное, становятся положительными. Но положительное, деленное на отрицательное, и отрицательное, деленное на положительное, остаются отрицательными» [там же, правила 33, 34]. Аналогичные правила приведены Магавирой, Шрипати, Бхаскарой II, Нарайаной.

Правила возведения в степень и извлечения корня следующие: «Квадрат положительного или отрицательного числа положителен... [знак] корня такой же, как у числа, из которого извлекается квадратный корень» [там же, правило 35]. Это правило показывает, что Брахмагупте не были известны двузначность корней квадратного уравнения и двузначность квадратного корня, кроме того, он ошибался, полагая, что квадратный корень из отрицательного числа будет отрицательным.

В середине IX в. индийским математикам уже была известна двузначность квадратного корня. Так, Магавира пишет: «Квадрат положительного или отрицательного числа — положительный, их квадратные корни будут соответственно положительными или отрицательными» [11, с. 107]. Комментатор Брахмагупты Притхудакасвами утверждает: «Квадратный корень должен быть взят или отрицательным, или положительным, какой более подходит для выполнения последующих действий» [54, т. 2, с. 24].

Магавира также говорит о невозможности извлечь квадратный корень из отрицательного числа: «Так как отрицательное число по своей природе не является квадратом, поэтому оно не имеет квадратного корня» [11, с. 107].

Индийцы называли положительные числа «дхана», или «сва» («имущество»), а отрицательные — «рина», или «кшайа» («долг»). Впоследствии эти термины в аналогичном же смысле употребляют математики арабоязычных стран, например «дайн» в значении «долг» у Абу-л-Вафы, и ученые в Европе («дебитум»—«долг» у Леонардо Пизанского).

В греческой математике, например у Диофанта, существовали правила действий над коэффициентами вычитаемых количеств, входивших в состав многочленов наряду с прибавляемыми количествами. Но отрицательных чисел, как таковых, у Диофанта не было: вычитаемые числа не являлись у него самостоятельными объектами.

Впервые в истории математики отрицательные числа встречаются в книге VIII древнекитайского трактата «Математика в девяти книгах». Там же сформулированы правила сложения и вычитания отрицательных чисел. Интересно отметить, что отрицательные числа имели название «фу»—«долг», «недостаток», т. е. трактовались так же, как и в индийской науке. Это говорит или о связях между древнекитайскими и индийскими учеными, которые еще недостаточно изучены, или о том, что к отрицательным числам ученые пришли при решении одних и тех же групп задач.

Линейные уравнения. Наиболее ранние сведения о линейных уравнениях имеются в «Шульба-сутре». Это трактаты, связанные с правилами измерения и построения алтарей. У Ариабхаты имеются несколько задач, сводящихся к решению линейного уравнения с одним неизвестным. Одна из них связана с вычислением стоимости вещи x, если известно, что два человека с первоначально равными капиталами имеют различное число вещей a, a_1 и различные оставшиеся после покупки суммы b, b_1. Эта задача сводится к решению уравнения

$$ax + b = a_1x + b_1.$$

Правило решения этого линейного уравнения Ариабхата дает следующим образом: «Разность между известными суммами двух людей следует разделить на разность коэффициентов при неизвестных. Частное даст величину неизвестного, если общие капиталы равны» [часть II, правило 30]. Таким образом,

$$x = \frac{b_1 - b}{a - a_1}.$$

Такая же задача приведена Бхаскарой II: «Один имеет 300 монет и 6 лошадей, другой имеет 10 таких лошадей, но у него недостает 100 монет. Оба одинаково богаты. Какова цена лошади?» [54, т. 2, с. 42]. Решение Бхаскара II дает в виде линейного уравнения

$$6x + 300 = 10x - 100,$$

решая которое легко найти, что лошадь стоит 100 монет.

Другая проблема — это знаменитая «задача о курьерах», обошедшая позднее мировую алгебраическую литературу. В ней требуется определить время встречи двух небесных тел, когда они двигаются навстречу друг другу или же одно вслед другому. Это правило Ариабхата дает следующими словами: «Два расстояния между двумя небесными светилами, движущимися в противоположных направлениях, следует разделить на сумму их скоростей. Два расстояния между двумя светилами, движущимися в одном направлении, следует разделить на разность их скоростей. Два результата [в каждом случае] дадут время встречи двух светил в прошлом и в будущем» [часть II, правило 31].

Таким образом, если известны расстояния S_1 и S_2 между светилами и их скорости V_1, V_2, то время встречи найдем по формулам

$$t=\frac{S_1+S_2}{V_1+V_2} \quad \text{в первом случае,}$$

$$t=\frac{S_1+S_2}{V_1-V_2} \quad \text{во втором случае,}$$

причем встреча могла произойти в прошлом или произойдет в будущем.

Бхаскара I формулирует это правило так: «Если одно светило двигается назад, а другое вперед, следует разделить разность их долгот на сумму их скоростей; в противоположном случае [т. е. когда светила двигаются в одном направлении] следует разделить разность их долгот на разность их скоростей. Это дает время до или после встречи двух светил» [40].

«Задача о курьерах» имеется также у Брахмагупты, в «Бахшалийской рукописи», у Магавиры, Шрипати и у других авторов.

Брахмагупта также приводит ряд задач на линейные уравнения. Вот одна из них: «Назови число прошедших дней за то время, когда сумма учетверенной двенадцатой части оставшихся градусов, увеличенных на единицу, и восьми будет равна оставшимся градусам, увеличенным на единицу» [36, гл. XVIII, правило 46]. Решение этой задачи Притхудакасвами дает следующим образом: обозначим величину оставшихся градусов через x, увеличив ее на единицу, получим $x+1$, двенадцатая часть этой суммы равна $\frac{x+1}{12}$, учетверенное выражение составит $\frac{x+1}{3}$, увеличив этот результат на 8, получим $\frac{x+25}{3}$. Это равно оставшимся градусам, увеличенным на единицу, т. е. $x+1$, или $\frac{3x+3}{3}$. Искомое уравнение будет $x+25=3x+3$.

Далее это уравнение решается по правилу, данному Брахмагуптой: «В [линейном] уравнении с одним неизвестным разность между известными членами, взятыми в обратном порядке, деленная на разность коэффициентов при неизвестных, [дает неизвестную величину]» [36, гл. XVIII, правило 43].

С линейными уравнениями часто приходилось сталкиваться при решении многих задач на проценты, смеси, движение, вычислении платы за труд. Такие задачи имеются у Магавиры, Шридхары, Шрипати, Бхаскары II, Нарайны. У Магавиры среди нескольких примеров и задач есть и такая: «Сумма $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}$ частей некоторого числа равна $\frac{1}{2}$. Каково число?» Эта задача решается по правилу ложного положения: «Примем неизвестную величину за единицу, затем [следует найти] сумму [указанных частей]. Частное от деления известного [числа] на полученную сумму дает требуемое число» [11, с. 108].

Правило одного ложного положения удобно для задач, приводящих к уравнениям вида $ax=b$, особенно если a есть сумма нескольких дробей. В этом случае в качестве x_1 выбирается число, кратное знаменателям. Тогда при $ax_1=b_1$

$$x=x_1\frac{b}{b_1}.$$

По правилу ложного положения решаются также задачи из «Бахшалийской рукописи», приводящие к уравнению $ax+b=p$. При $ax_1+b=p_1$ решение имеет вид

$$x=x_1+\frac{p-p_1}{q},$$

где x_1 — произвольное число, p_1 — соответствующее ему значение свободного члена. В арабской математической литературе широко применялось правило двух ложных положений, которое считалось индийским.

Системы линейных уравнений. Впервые системы линейных уравнений с двумя неизвестными встречаются в «Шульба-сутре», где имеются задачи, сводящиеся к решению следующей системы:

$$\begin{cases} x+y=21, \\ \frac{x}{m^2}+\frac{y}{n^2}=1. \end{cases}$$

Ариабхата в части II, правиле 29 приводит решение системы линейных уравнений с несколькими неизвестными вида:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k - x_1 = a_1, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} x_k - x_2 = a_2, \\ \dots\dots\dots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} x_k - x_n = a_n. \end{cases}$$

Правило гласит: «Если известны результаты, полученные последовательным вычитанием из суммы [нескольких] величин каждого из этих количеств, помести эти результаты в отдельности. Сложи их вместе и раздели на число этих величин без одного. Результатом будет сумма всех количеств». Действительно, просуммировав почленно указанную систему, имеем

$$n \sum_{k=1}^{n} x_k - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

или

$$(n-1) \sum_{k=1}^{n} x_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

что в итоге приводит к решению, указанному Ариабхатой:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n-1}.$$

Аналогичное правило приведено и Магавирой, который иллюстрирует его примером: «Четыре купца были опрошены таможеником о сумме их товаров. Первый купец, отбросив принадлежавшее ему количество, указал, что общая сумма равна 22; второй, поступив так же, назвал сумму равной 23; третий —24, четвертый —27. О друг, назови мне суммы каждого купца в отдельности» [67, гл. VI, правила 160—162].

Решая по правилу Ариабхаты, находим:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{22 + 23 + 24 + 27}{4 - 1} = \frac{96}{3} = 32.$$

Таким образом, суммы каждого купца в отдельности равны: $x_1 = 10$, $x_2 = 9$, $x_3 = 8$, $x_4 = 5$.

У Брахмагупты, Магавиры, Бхаскары II имеются задачи, сводящиеся к решению систем линейных уравнений. Так, задача Магавиры: «Стоимость 9 лимонов и 7 лесных яблок равна 107, стоимость 7 лимонов и 9 лесных яблок равна 101. О математик, быстро назови мне цену лимона и лесного яблока» [11, с. 109] приводит к системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$9x + 7y = 107, \qquad 7x + 9y = 101,$$

где через x обозначена цена лимона, а через y—цена лесного яблока. В общем виде эта система имеет вид

$$ax + by = c, \qquad bx + ay = d.$$

Решение этой системы Магавира приводит, имея в виду именно эту задачу: «Из большей стоимости [всех плодов], умноженной на большее число плодов, следует вычесть меньшую стоимость, умноженную на меньшее число плодов. Разделив остаток на разность квадратов [большего и меньшего] числа плодов, получим цену большего числа плодов. Цену другого плода получим при противоположном умножении [стоимостей на число плодов]» [там же, с. 109]. Решение системы таково:

$$x = \frac{ac - bd}{a^2 - b^2}, \qquad y = \frac{ad - bc}{a^2 - b^2}.$$

Впрочем, у Брахмагупты имеется правило решения такой системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x - y = b, \end{cases}$$

которое гласит: «Сумму увеличь и уменьши на разность и раздели на два» [36, гл. XVIII, правило 36], т. е.

$$x = \frac{a + b}{2}, \qquad y = \frac{a - b}{2}.$$

Системы линейных уравнений с несколькими неизвестными, приведенные в «Бахшалийской рукописи», могут быть представлены:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 13, \\ x_2 + x_3 = 14, \\ x_3 + x_1 = 15; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 16, \\ x_2 + x_3 = 17, \\ x_3 + x_4 = 18, \\ x_4 + x_5 = 19, \\ x_5 + x_1 = 20, \end{cases}$$

или в общем виде:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a_1, \\ x_2 + x_3 = a_2, \\ x_3 + x_4 = a_3, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n + x_1 = a_n, \end{cases}$$

где n нечетно.

Первая система получена при решении такой задачи: «Богатства первого и второго, взятые вместе, составляют 13, богатства второго и третьего, взятые вместе, есть 14, богатства первого и третьего известно, что равны 15. Назови мне богатства каждого» [54, т. 2, с. 47]. Система решается по правилу ложного положения: пусть $x_1' = 5$, тогда $x_2' = 8$, $x_3' = 6$; $x_3' + x_1' = 11$, тогда

$$x_1 = 5 + \frac{15 - 11}{2} = 7, \qquad x_2 = 6, \qquad x_3 = 8,$$

Квадратные уравнения. Первые задачи на квадратные уравнения встречаются в «Шульба-сутре», где приходится решать полные и неполные квадратные уравнения

$$ax^2 = b, \qquad ax^2 + x = b.$$

У Ариабхаты к квадратным уравнениям приводят задачи на нахождение числа членов арифметической прогрессии и на проценты. Он дает два правила решения квадратных уравнений в зависимости от того, является ли коэффициент при x четным или нечетным. Правило нахождения числа членов арифметической прогрессии таково: «Умножь сумму [арифметической] прогрессии на увосьмеренную разность [прогрессии] и сложи с квадратом разности между удвоенным первым членом и разностью [прогрессии]; после извлечения из этого квадратного корня вычти удвоенный первый член и раздели [все] на разность [прогрессии]. Половина суммы [найденного] выражения и единицы будет числом членов [арифметической прогрессии]» [часть II, правило 20]. Таким образом, число членов будет равно:

$$n = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{8dS + (2a - d)^2} - 2a}{d} + 1\right].$$

Комментатором Парамешварой по правилу Ариабхаты решается такая задача: капитал $A = 100$ приносит в месяц прирост x, который затем отдается под проценты на $T = 6$ месяцев. Первоначальная прибыль вместе с новым приростом в сумме составляют $B = 16$. Нужно найти величину первоначального процента.

Решение уравнения $Tx^2 + Ax = AB$ Ариабхата дает следующими словами: «Умножь сумму прироста капитала и прироста этого прироста на время и на капитал, прибавь к этому квадрат половины капитала, извлеки отсюда квадратный корень, затем вычти половину капитала и раздели остаток на время» [часть II, правило 25]. Таким образом, решение квадратного уравнения получим по формуле

$$x = \frac{\sqrt{BAT + \left(\frac{A}{2}\right)^2} - \frac{A}{2}}{T} = 10.$$

Аналогичные задачи на сложные проценты приведены многими индийскими авторами. Эта задача встречается и в европейских руководствах нового времени. Так, первая задача на квадратные уравнения в «Началах алгебры» французского математика А. Клеро также на сложные проценты.

Значительный вклад в решение квадратных уравнений внес Брахмагупта, который сформулировал общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к канонической форме $ax^2 + bx = c$ ($a > 0$), где коэффициент при неизвестной первой степени b и свободный член c могут принимать и отрицательные значения. Общее правило решения уравнения $x^2 = bx + c$ при различных комбинациях знаков коэффициентов было определено М. Штифелем в 1544 г. В «Бахшалийской рукописи» к квадратным уравнениям приводят некоторые задачи на движение, решаемые методами арифметической прогрессии: путник идет с постоянной скоростью v йоджана в день, когда он был уже в пути t дней, вслед ему отправился второй, который в первый день прошел v_1 йоджана, а в каждый последующий проходил на a йоджана больше, чем в предыдущий. Через сколько дней второй путник догонит первого? [54, т. 2, с. 60]. Если через n обозначить число дней, за которые второй путник догонит первого, то получим уравнение

$$v(t+n)=n\left[v_1+\left(\frac{n-1}{2}\right)a\right],$$

или

$$an^2-[2(v-v_1)+a]n=2tv.$$

Решение, приведенное в «Бахшалийской рукописи», словесно можно записать так:

$$n=\frac{\sqrt{[2(v-v_1)+a]^2+8atv}+[2(v-v_1)+a]}{2a}.$$

По этому правилу решаются два примера с такими исходными данными:

$$v=5,\quad t=6,\quad v_1=3,\quad a=4;$$

$$v=7,\quad t=5,\quad v_1=5,\quad a=3.$$

У Магавиры отсутствует специальный раздел, посвященный квадратным уравнениям, однако решение некоторых задач можно получить лишь нахождением корней квадратного уравнения. Вот одна из таких задач: «$^1/_4$ стада верблюдов находится в лесу, 15 верблюдов расположились на берегу реки, [остальные верблюды] — удвоенный квадратный корень из общего числа — на склоне холма. Сколько верблюдов в стаде?» [11, с. 111]. Обозначив число верблюдов в стаде через x, получим

$$\frac{1}{4}x+2\sqrt{x}+15=x$$

или в общем виде:

$$\left(1-\frac{a}{b}\right)x-c\sqrt{x}=p.$$

Прежде чем решить это уравнение, Магавира делит все его члены на коэффициент при x и затем решает приведенное квадратное уравнение.

Магавире была известна двузначность корней квадратного уравнения. Так, задача: «$^1/_{16}$ часть стаи павлинов,

умноженная на самое себя, сидит на дереве манго, $^1/_9$ остатка, умноженная на самое себя, вместе с 14 павлинами находятся на дереве тамала. Сколько всего павлинов?» [11, с. 111—112] приводит к уравнению

$$\frac{x}{16}\cdot\frac{x}{16}+\frac{15x}{16\cdot 9}\cdot\frac{15x}{16\cdot 9}+14=x$$

или в общем виде

$$\frac{a}{b}x^2-x+p=0.$$

Правило решения этого уравнения гласит: «Разность между знаменателем, деленным на [свой] числитель, и учетверенным свободным членом следует умножить на этот знаменатель, [деленный на числитель]. Квадратный корень из этого следует прибавить и вычесть из этого знаменателя, [деленного на числитель]. Половина этого есть [неизвестное количество]» [11, с. 112]. Таким образом,

$$x=\frac{\frac{b}{a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{a}-4p\right)\frac{b}{a}}}{2}.$$

В некоторых случаях, когда один из корней квадратного уравнения не удовлетворяет условию задачи, Магавира берет лишь один знак, который приводит к правильному решению. Так, в данном случае задаче удовлетворяет лишь корень 48, второй же корень дробный. Двузначность корней квадратного уравнения, возможно, была известна Брахмагупте. Он рассматривает две задачи, которые сводятся к одному квадратному уравнению, причем в качестве решений берутся оба корня уравнения. Вот первая задача: «Квадратный корень остатка от вычитания двух из числа вращений Солнца [последовательно] уменьшается на 1, умножается на 10 и увеличивается на 2; когда это будет равно остатку от вычитания 1 из числа вращений Солнца?» [36, гл. XVIII, правило 49].

Комментатор Притхудакасвами неизвестную величину принимает равной x^2+2, тогда задача сводится к уравнению

$$(\sqrt{x^2+2-2}-1)10+2=x^2+2-1$$

или

$$x^2-10x=-9.$$

Вторая задача такова: «Когда квадрат одной четвертой от числа месяцев, уменьшенной на 3, будет равен числу месяцев?» [там же, правило 50]. В качестве неизвестной Притхудакасвами выбирает $4x$, тогда $\left(\frac{4x}{4}-3\right)^2=4x$ или $x^2-10x=-9$.

Согласно комментатору, для первой задачи подходит значение 9, для второй — значение 1, которые можно получить только в том случае, если при решении квадратного уравнения взять два знака перед квадратным корнем $x=5\pm\sqrt{25-9}$.

Текст Брахмагупты не позволяет судить достоверно о ходе решения этих задач, а Притхудакасвами был современником Магавиры и мог также знать о двузначности корней квадратного уравнения.

Магавира и Шридхара значительно расширяют традиционный круг задач, которые приводят к квадратным уравнениям. Если раньше это были задачи на арифметическую прогрессию и сложные проценты, то Шридхара добавляет сюда новые типы задач на оплату труда, на вычисление числа животных в стаде. Ряд задач носит отвлеченный характер. О том, как было получено правило решения квадратного уравнения, можно судить по отрывку из не дошедшего до нас алгебраического трактата Шридхары. Этот отрывок приведен Бхаскарой II: «Умножь обе стороны [уравнения] на учетверенный коэффициент при квадрате неизвестного, а [затем] прибавь к обеим частям квадрат [первоначального] коэффициента при неизвестной в первой степени, затем [извлеки из обеих частей] корень» [36, с. 209]. Таким образом, обе части уравнения $ax^2+bx+c=0$ умножаются на $4a$, а затем прибавляется к обеим частям величина b^2: $4a^2x^2+4abx+b^2+4ac=b^2$, или после упрощения $(2ax+b)^2=b^2-4ac$. Извлекая квадратный корень, можно получить $2ax+b=\sqrt{b^2-4ac}$,

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Этот отрывок весьма интересен, так как индийские математики не так уже часто приводят выводы формул.

Среди других проблем Ариабхата рассматривает системы уравнений, одно из которых первой степени, а другое — второй. Вот эти системы:

$$\begin{cases} x-y=a, \\ xy=b; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=a, \\ x^2+y^2=b. \end{cases}$$

Решения первой системы Ариабхата дает в части II, правиле 24: «Умножь произведение [двух величин] на квадрат двух и сложи с квадратом разности между этими величинами; [после] извлечения квадратного корня увеличь и уменьши на разность между двумя величинами. Половина каждого результата будут [искомыми] величинами». Таким образом, решение первой системы имеет вид

$$x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+4b}+a\right),\qquad y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+4b}-a\right).$$

Решение второй системы Ариабхата излагает в части II, правиле 23: «Следует вычесть сумму квадратов двух величин из квадрата их суммы. Половина этого есть произведение двух величин». Для данной системы решениями будут

$$x=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{2b-a^2}\right),\qquad y=\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{2b-a^2}\right).$$

Прогрессии. Арифметические и геометрические прогрессии занимали видное место в математике народов Индии. Некоторые задачи приобрели чрезвычайно широкую популярность, например задача о вознаграждении за изобретение шахмат, сводящаяся к нахождению суммы геометрической прогрессии со знаменателем 2. Впрочем, задачи на суммирование такой геометрической прогрессии встречаются у многих народов, например в древнекитайской «Математике в девяти книгах».

Наиболее ранние примеры прогрессий относятся к эпохе Индской цивилизации: система весовых мер была основана на удвоении для небольших гирь 1,2,4,8,16,32,64, т. е. представляла собой геометрическую прогрессию со знаменателем 2 и первым членом, равным 1. Среди весовых мер существовали и другие прогрессии, например геометрическая прогрессия с первыми членами, равными 16,32, 64, и знаменателем 10. Таким образом, мы имеем значения: 16, 160, 1600; 32, 320, 3200; 64, 640, 6400.

Другие сведения о прогрессиях относятся к ведийскому периоду. Так, в «Тайттирийа самхита» содержатся следующие арифметические прогрессии: 1,3,5...19; 2,4,6...20; 4,8,12...20; 5,10,15...100; 10,20,30...100; 19,29,39...99.

В «Панчавимша брахмана» описывается геометрическая прогрессия со знаменателем 2: 12,24,48,96,192...3072, 6144....49 152, 98 304, 196 608, 393 216.

В этих примерах не указывается сумма прогрессий. Сумма арифметической прогрессии приводится в «Шатапатха брахмана» в следующей задаче:

$$3(24+28+32+36+40+44+48) =$$
$$= 3\cdot\frac{7}{2}[2\cdot 24+(7-1)\cdot 4] = 756.$$

К нахождению этой суммы приводит задача о нахождении числа слогов определенного размера. Сумму арифметической прогрессии находят по формуле

$$S = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d].$$

В ведийских текстах имеются и другие примеры суммирования арифметической прогрессии, например в «Брихатдевате» (IV в. до н. э.) приведена сумма арифметической прогрессии с первым членом, равным 2, разностью 1 и числом членов 999, т. е. прогрессия $2+3+4+\ldots+1000 = 500\,499$. В трактате «Калпасутра» Бхадрабаху (III в. до н. э.) приводится такая геометрическая прогрессия и ее сумма: $1+2+4+\ldots+8192 = 16\,383$. Эта прогрессия играла большую роль не только в математике, но и в индийском стихосложении, когда необходимо было найти число слогов нужного размера.

Задачи на прогрессии встречаются довольно рано и в других странах древнего мира. Так, в Древнем Египте родилась задача на геометрическую прогрессию с первым членом и разностью, равными 7: речь идет о 7 кошках в каждом из 7 домов; каждая кошка съела по 7 мышей, из которых каждая съела по 7 колосьев ячменя; каждый же колос мог дать 7 мер хлеба. В папирусе Райнда, откуда взята эта задача, приводится и сумма пяти членов этой прогрессии — 19 607. В том же папирусе дана и арифметическая прогрессия, у которой сумма и число членов равны по 10, а разность 1/8.

В Вавилоне знали правило суммирования n членов арифметической прогрессии с данными первым и последним членами, также сообщают результаты суммирования

некоторых геометрических прогрессий, например прогрессии с первым членом, равным 1, и знаменателем 2.

После «Ариабхатии» правила и примеры на прогрессию можно найти в большинстве сочинений по математике или в математических главах астрономических сочинений. Иногда этих задач и правил столь много, что их выделяли в специальный раздел. Санскритское название прогрессии «шредхи». Этим термином древние индийские ученые именовали какое-либо множество определенных вещей или предметов, взятых вместе. Первый член прогрессии обозначается терминами «ади», «мучха», «вадана», «вактра», которые являются синонимами слова «лицо»; разность прогрессии — словами «чехайа», «прачхайа», «суттара». Дословно это переводится как «присоединение», «приращение». Число членов обозначается словами «пада», «чачха». Санскритские термины суммы прогрессии: «ганита пхала»— «результат», «самкалита» — «сумма», «дхана» — «богатство».

Правила суммирования арифметической прогрессии, приводимые Ариабхатой, таковы: «Требуемое число членов без единицы, деленное пополам, плюс число предшествующих членов, [эта сумма], умноженная на общую разность, плюс первый член дает средний член. Это, умноженное на требуемое число членов, есть сумма требуемого числа членов [арифметической прогрессии]. Или сумма первого и последнего членов, умноженная на половину числа членов, [есть сумма арифметической прогрессии]». В первой части данного правила 19 из части II находится сумма n членов арифметической прогрессии, начиная с $p+1$ члена до $p+n$ члена:

$$S = n\left[a+\left(\frac{n-1}{2}+p\right)d\right].$$

Во второй части правила дается формула

$$S = \frac{a_1+a_n}{2}n.$$

Ариабхата также приводит правила для нахождения числа членов арифметической прогрессии:

$$n = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{8dS+(d-2a)^2}-2a}{d}+1\right].$$

У Брахмагупты формулы суммы и числа членов арифметической прогрессии даны в таком виде:

$$S = \frac{a_n + a_1}{2} n,$$

$$S = \frac{2a + (n-1)d}{2} n, \qquad n = \frac{\sqrt{8dS + (2a-d)^2} - 2a + d}{2d}.$$

У Магавиры впервые встречаются правила нахождения первого члена и разности арифметической прогрессии:

$$a_1 = \frac{S - \frac{(n-1)}{2} dn}{n}, \qquad a_1 = \frac{S}{n} - \frac{n-1}{2} d,$$

$$a_1 = \frac{\frac{2S}{n} - (n-1)d}{2}, \qquad d = \frac{\frac{S}{n} - a}{\frac{n-1}{2}} = \frac{\frac{2S}{n} - 2a}{n-1}.$$

Любопытно следующее правило: «При любом числе членов [арифметической прогрессии] возьмем единицу для первого члена. Число членов, уменьшенное на первый член, затем деленное на половину разности между числом членов и единицей, [возьмем в качестве] разности прогрессии. Сумма равна квадрату числа членов. Это, умноженное на число членов, равно его кубу» [11, с. 115]. Как можно видеть, речь идет об арифметической прогрессии, для которой

$$S = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2, \qquad Sn = n^2 n = n^3.$$

Правил и задач на геометрическую прогрессию у Ариабхаты и Брахмагупты нет. Правила нахождения любого члена и суммы геометрической прогрессии впервые приведены Магавирой, а затем Шридхарой и Бхаскарой II в виде

$$a_{n+1} = aq^n, \qquad S = \frac{aq^n - a}{q-1}.$$

Суммирование числовых рядов. Отдельные примеры суммирования арифметических и геометрических прогрессий были найдены в сочинениях, написанных в ведийский период. С Ариабхаты суммирование числовых рядов было постоянно в центре внимания индийских ученых, что

позволило им добиться в этой области ряда существенных результатов.

Ариабхата приводит формулы суммирования треугольных чисел:

$$1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{(n+1)^3 - (n+1)}{6}$$

[часть II, правило 21], натуральных квадратов и кубов:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\sum_{k=1}^{n} k\right]^2$$

[часть II, правило 22]. Эти правила, впрочем, были известны еще вавилонянам, египтянам, китайцам и грекам.

Брахмагупта и Магавира приводят несколько правил суммирования числовых рядов. Так, сумма квадратов чисел натурального ряда есть

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{[2(n+1)^2 - (n+1)] \frac{n}{2}}{3}.$$

Сумма квадратов членов арифметической прогрессии равна

$$\sum_{k=1}^{n} [a + (k-1)d]^2 = n\left\{\left[\frac{(2n-1)d^2}{6} + ad\right](n-1) + a^2\right\}.$$

Эту сумму нашел еще Архимед (III в. до н. э.). Сумма кубов чисел натурального ряда такова:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 (n+1)^2.$$

Сумма кубов членов арифметической прогрессии равна

$$\sum_{k=1}^{n} [a + (k-1)d]^3 = Sa(a-d) + S^2 d,$$

где S — сумма членов этой же прогрессии. Способы нахождения квадрата и куба первых n чисел натурального ряда приведены в дальнейшем всеми индийскими учеными.

Они также встречаются в арабоязычной и западноевропейской математической литературе.

Весьма любопытны проблемы суммирования рядов, которые занимали знаменитого среднеазиатского ученого-энциклопедиста Бируни (X—XI вв.). В вопросах теоретической арифметики Бируни придерживался преимущественно классификации Никомаха (I—II вв.), хотя его основные определения во многом совпадают с евклидовыми. Бируни проводил эту классификацию и в основных определениях теории четных и нечетных, а также фигурных чисел. Наряду с обоснованием индийских математических приемов способами античной математики у Бируни наблюдался и обратный процесс — попытка применения к пифагорейской классификации фигурных чисел индийских обозначений. Так, в «Книге вразумления начаткам науки звезд», написанной вскоре после возвращения из Индии, основные определения теории чисел и их классификация — греческие по существу — носят следы непосредственного влияния индийской математической традиции [28, с. 33].

Для треугольных чисел, т. е. чисел вида $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, которые изображаются треугольниками, Бируни приводит их индийское название «санкалита» («сложение»). Для чисел вида

$$1+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$

которые изображаются тетраэдрами, индийское название «санкалита санкалита» («сложение сложений»). Для пирамидальных чисел вида

$$1+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

которые изображаются пирамидами, Бируни приводит индийские названия «варга санкалита» («сложение квадратов») и «гхана санкалита» («сложение кубов»).

Конечно, подобные попытки применения к греческим теоретико-числовым проблемам индийских обозначений носили у Бируни эпизодический характер и не нашли широкого распространения, тем не менее они свидетельствуют о высоком теоретическом уровне индийской науки и о тех сложных путях, какими шла передача математических знаний от эллинистических стран к средневековой Западной Европе.

Комбинаторика. Комбинаторика была одной из областей знания, к которой индийцы проявляли большой теоретический и практический интерес. Одним из первоначальных толчков к занятию комбинаторикой послужило ведийское стихосложение, имевшее различные размеры с 6, 8, 9, 11, 12 слогами. При создании стихов различных размеров надо было учитывать не только число слогов, но и долготу гласных звуков в каждой слоговой группе. Это и заставило разработать специальную математическую теорию.

Среди ведийских сочинений по этому вопросу наибольший интерес представляет трактат «Чхандах-сутра» Пингалы (200 г. до н. э.), в котором дается описание метода, называемого «меру-прастара», для нахождения числа сочетаний из n слогов, взятых по 1, 2, 3... n слогов одновременно. Этот метод, согласно объяснению комментатора Халайудха (X в. н. э.), заключается в следующем: «После построения квадрата на вершине ниже строятся еще два квадрата так, чтобы половина каждого располагалась по каждой из двух сторон. Под этим построим три квадрата, еще ниже строятся четыре квадрата, и процесс повторяется до тех пор, пока требуемая пирамида не будет получена. В первом квадрате запишем единицу. Затем в каждом из двух квадратов второй линии следует снова поместить по единице. В третьей линии единицу следует поместить в каждом из двух крайних квадратов. В среднем квадрате этой линии следует поместить сумму цифр ближайших двух квадратов, расположенных выше. В четвертой линии единица помещается в каждом из двух крайних квадратов, в каждом из соседних квадратов помещается сумма цифр ближайших двух квадратов, написанных выше, а это есть три. Таким же путем продолжаем заполнять квадраты. Так, вторая линия дает число комбинаций из короткого и длинного звуков, образующих один слог, третья линия дает то же самое для двух слогов, четвертая линия — для трех слогов и т. д.» [74, с. 156—157].

Таким образом, метод «меру-прастара» дает способ построения треугольника биномиальных коэффициентов,

который использовался для комбинаторных задач, и нет оснований говорить о знакомстве индийцев в это время с разложением степени двучлена

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Тот же комментатор Халайудха сообщает, что во II в. до н. э. не только могли вычислять значения C_n^m, но также знали соотношение $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Правила и задачи на комбинаторику у Ариабхаты отсутствуют. Они даны в сочинениях Магавиры, Шридхары, Бхаскары II, Нарайаны. Так, Магавира словесно приводит формулу нахождения числа сочетаний:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}.$$

Это правило он иллюстрирует тремя примерами. Вот один из них: «О друг, назови число различных ожерелий, которые можно получить из бриллиантов, сапфиров, изумрудов, кораллов и жемчугов» [11, с. 116]. В «Патиганите» Шридхары имеется небольшой раздел, посвященный сочетаниям. Он состоит из двух правил и одной задачи. Правило нахождения числа сочетаний следующее. «Число от 1 до [данного] числа в обратном порядке следует разделить на эти же числа в прямом порядке, [полученные частные] следует по порядку перемножать. [Это дает число вкусовых оттенков]» [33, правило 72]. Таким образом, формулу сочетаний из n элементов, взятых по 1, 2, 3, ...

..., m, ... n, Шридхара приводит в виде $\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\ldots\frac{2}{n-1}\cdot\frac{1}{n}$. Второе правило таково: «Для получения блюда из двух вкусовых оттенков следует по порядку к последующим прибавить первый [вкусовой оттенок], для получения трех и более [вкусовых оттенков] следует предшествующий прибавить к остальным вкусовым оттенкам» [33, правило 73]. Это правило применяется к решению такого примера: «Повар готовит различные блюда с шестью вкусовыми оттенками: острым, горьким, вяжущим, кислым, соленым, сладким. Друг, скажи, каково число всех разновидностей?» [33, пример 95].

Интересен анализ комбинаторных задач, который проводит Бируни на основании изучения системы индийского стихосложения. Элементом, определяющим размер, является пада (стопа). В простейшем случае это полустишие; обычно применялись трехстопный и чаще четырехстопный размеры, реже пятистопный. В своем трактате «Индия» [4, с. 158—160] Бируни излагает результаты математического исследования структуры индийского стиха, приведенные Брахмагуптой, который рассмотрел самые распространенные размеры, когда наибольшее число слогов в строфе — 24, наименьшее число слогов, содержащееся в одной паде,— 4. Поэтому двухстопный размер можно представить в виде $4 + 20$, трехстопный в виде $4 + 4 + 16$, четырехстопный в виде $4 + 4 + 4 + 12$ и т. д.

Для того чтобы подсчитать комбинации из 24 слогов в размере из двух пада, когда пада состоит из наименьшего числа слогов, т. е. 4, Брахмагупта составил таблицу для числа 24, разбив его по столбцам от $4 + 20$ до $20 + 4$. «Если мы возьмем стопы,— пишет Бируни,— состоящие из четырех слогов, т. е. наименьшего допустимого количества, и хотим узнать, какие сочетания из двадцати четырех слогов получаются в двухстопном размере, то [мы берем числовые выражения обеих стоп 4 и 20], в левой стопе прибавляем единицу, а из правой вычитаем единицу, оба остатка пишем под соответствующими левой и правой цифрами; это действие повторяем до тех пор, пока не дойдем до тех же двух цифр в начале обоих столбцов, но теперь поменявшихся местами, согласно следующей схеме:

4	20
5	19
6	18
7	17
8	16
9	15
10	14
11	13
12	12

13	11
14	10
15	9
16	8
17	7
18	6
19	5
20	4

Число этих сочетаний равно семнадцати, т. е. разности между двумя первоначальными цифрами, увеличенными на единицу». Это есть C_{17}^1 — число сочетаний из 17 по 1.

Что касается трехстопного размера с принятым ранее числом слогов, продолжает Бируни, то число сочетаний равно 78. В современных обозначениях это C_{13}^2. Для четырехстопного размера таким же образом получается 84 комбинации, т. е. число сочетаний C_9^3.

Бируни отмечает важное значение работы Брахмагупты и предлагает провести аналогичное исследование греческой поэзии. Таким образом, мы еще раз сталкиваемся с попыткой применить индийские математические приемы к греческой науке.

Теория чисел

Наиболее ранние сведения о применении неопределенных уравнений в индийской математике появились в середине I тысячелетия до н. э. в «Шульба-сутре». При преобразовании квадрата площадью a^2 в квадрат площадью na^2 приходилось решать неопределенное уравнение второй степени $x^2 + y^2 = z^2$, решение которого дается в виде m^2, $\frac{m^2-1}{2}$, $\frac{m^2+1}{2}$. При расчетах алтарей решались системы неопределенных уравнений первой степени, например такое:

$$\begin{cases} x + y = 21, \\ \frac{x}{m^2} + \frac{y}{n^2} = 1. \end{cases}$$

Хотя метод решения не отмечен, комментатор дает правильные значения, а именно $m = 6$, $n = 4$ для $x = 9$, $y = 12$ и затем $m = 3$, $n = 6$ для $x = 5$, $y = 16$.

Однако систематически неопределенные уравнения стали объектом изучения лишь в первые века новой эры, когда индийские математики и астрономы столкнулись с рядом календарно-астрономических задач. В этих задачах необходимо было узнать, через какой промежуток времени небесные тела, имеющие различные периоды обращения, займут то же самое относительное положение. Эти задачи сводятся к отысканию целых чисел, дающих при делении числа N на данные числа a, c известные остатки p, q.

Таким образом, мы имеем $N = ax + p = by + q$, или $ax + p - q = by$, приняв $\pm b = p - q$, получим $ax \pm b = cy$.

Знаки перед свободным членом зависят от величины чисел p и q.

Другая задача, которая приводила к неопределенному уравнению первой степени, была такая: необходимо найти такое число x, произведение которого с данным числом a, увеличенное или уменьшенное на другое известное число, могло бы делиться без остатка на данное число c. Иначе говоря, надо было найти в целых положительных числах решение выражения

$$\frac{ax \pm b}{c} = y.$$

Позднее индийские математики стали просто решать уравнение $ax \pm b = cy$.

Первым математиком, давшим решение неопределенного уравнения первой степени в целых положительных числах, был Ариабхата; им рассматривалось уравнение $ax + b = cy$. Бхаскара I показал, что методом Ариабхаты можно решать и уравнение $ax - b = cy$ и что решение этого уравнения следует из решения уравнения $ax - 1 = cy$. Брахмагупта и другие индийские ученые несколько упростили этот метод решения, а Ариабхата II улучшил их методы.

Индийские ученые понимали, а многие из них и отмечали, что эти уравнения могут быть разрешимы только в том случае, если числа (a, c) взаимно просты. Если же они имеют общий делитель, то на него должен был делиться и свободный член b, иначе уравнение лишено смысла. Так, Бхаскара I отмечает: «Делимое и делитель должны быть взаимно простыми после того, как их разделили на остаток от их общего взаимного деления. Тогда по отношению к ним можно применять процесс размельчения» [54, т. 2, с. 92].

Правило Бхаскары I станет яснее, если вспомнить, что санскритские термины для неопределенного линейного уравнения «кутака», «кутакара» дословно означают «размельчать», «перемалывать», «распылять».

Шрипати указывает: «Делимое, делитель и свободный член следует разделить на их общий множитель, если таковой имеется, затем возможно применять описанный метод. Если делимое и делитель имеют общий множитель, на который не делится свободный член, то проблема абсурдна» [там же].

Свое правило Ариабхата приводит в части II, правила 32, 33 для решения такой проблемы: найти число N, которое, будучи разделено на данные числа a, c, дает два известных остатка p, q. Эта задача приводит к следующим неопределенным уравнениям первой степени:

$$ax + b = cy, \text{ если } p > q,$$

$$ax - b = cy, \text{ если } p < q.$$

Последнее уравнение можно свести к первому, если в нем заменить неизвестные $cy + b = ax$.

Правило Ариабхаты, написанное очень сжато вызвало большие споры и различные точки зрения. Приведем метод решения неопределенного линейного уравнения, как он изложен у Датты и Сингха [54].

Вначале находится общий наибольший делитель двух чисел a и c согласно алгоритму Евклида (IV в. до н. э.). Мы получим

$$a = cq_0 + r_1,$$

$$c = r_1q_1 + r_2,$$

$$r_1 = r_2q_2 + r_3,$$

$$r_2 = r_3q_3 + r_4,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$r_{m-2} = r_{m-1}q_{m-1} + r_m,$$

$$r_{m-1} = r_mq_m + r_{m+1}.$$

Подставляя величину a в исходное уравнение, имеем

$$cy = (cq_0 + r_1)\, x + b.$$

Поэтому

$$y = q_0x + y_1,$$

где

$$cy_1 = r_1x + b.$$

Иными словами, поскольку $a = cq_0 + r_1$, то, взяв $y = q_0x + y_1$, основное уравнение можно свести к уравнению $cy_1 = r_1x + b$. Затем, приняв во внимание, что $c = r_1q_1 + r_2$, возьмем $x = q_1y_1 + x_1$, вновь полученное уравнение можно свести к уравнению $r_1x_1 = r_2y_2 - b$ и т. д. В итоге мы получим:

$$\begin{aligned}
y &= q_0x + y_1, & cy_1 &= r_1x + b,\\
x &= q_1y + x_1, & r_1x_1 &= r_2y_2 - b,\\
y_1 &= q_2x_1 + y_2, & r_2y_2 &= r_3x_1 + b,\\
x_1 &= q_3y_2 + x_2, & r_3x_2 &= r_4y_2 - b,\\
&\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots\\
y_{n-1} &= q_{2n-2}x_{n-1} + y_n, & r_{2n-2}y_n &= r_{2n-1}x_{n-1} + b,\\
x_{n-1} &= q_{2n-2}y_n + x_n, & r_{2n-1}x_n &= r_{2n}y_n - b,\\
y_n &= q_{2n}x_n + y_{n+1}; & r_{2n}y_{n+1} &= r_{2n+1}x_n + b.
\end{aligned}$$

Если числа a и c взаимно просты, то после n-го шага в остатке получим нуль. В случае n четного мы имеем $r_{2n} = 1$, $r_{2n+1} = 0$, $q_{2n} = r_{2n-1}$, тогда $y_n = q_{2n}x_n + b$ и $y_{n+1} = b$. Выбрав произвольное целое значение t для x_n, мы получим величину y_n. Выполняя действия в обратном порядке, мы найдем целые положительные решения x, y нашего неопределенного уравнения.

В случае нечетного n мы будем иметь $r_{2n-1} = 1$, $r_{2n} = 0$, $q_{2n-1} = r_{2n-2}$. Последнее равенство в алгоритме Евклида будет отсутствовать, а предпоследние равенства будут иметь вид $x_{n-1} = q_{2n-1}\, y_n - b$; $x_n = -b$. Выбрав произвольное целое значение t для y_n, мы получим целочисленное значение для x_{n-1}. Выполняя действия в обратном порядке, мы найдем целые положительные решения x, y нашего уравнения.

Если числа a и c не взаимно просты, то в случае четного n мы получим равенство $r_{2n}y_{n+1} = r_{2n+1}x_n + b$ или

$$y_{n+1} = \frac{r_{2n+1}x_n + b}{r_{2n}}.$$

Выбрав целое число t для x_n таким, чтобы

$$y_{n+1} = \frac{r_{2n+1}t + c}{r_{2n}}$$

было целочисленным, мы в конечном итоге получим целочисленные решения уравнения. При n нечетном мы имеем

$$r_{2n-1}x_n = r_{2n}y_n - b$$

или $x_n = \dfrac{r_{2n}y_n - b}{r_{2n} - 1}$.

Выбрав $y_n = t_1$, где t_1 — целое, таким, что

$$x_n = \frac{r_{2n}t_1 - b}{r_{2n-1}}$$

будет целым числом, найдем целочисленные решения неопределенного уравнения.

Зная наименьшее целочисленное решение уравнения $x = \alpha$, $y = \beta$, общее решение можно найти по формулам $x = cm + \alpha$, $y = am + \beta$, где m произвольное целое число.

Приведем примеры, решенные комментатором Парамешварой: число $\frac{8x}{29}$ дает остаток 4; число $\frac{17x}{45}$ дает остаток 7. Эти задачи эквивалентны неопределенным уравнениям $\frac{8x-4}{29} = y$; $\frac{17x-7}{45} = z$, или $8x - 29y = 4$; $17x - 45z = 7$, где y и z целые числа. Чтобы найти число x, удовлетворяющее первому уравнению, находим наибольший общий делитель по алгоритму Евклида:

```
8) 29 (3
   24
   ---
    5) 8 (1
       5
       --
       3) 5 (1
          3
          --
          2) 3 (1
             2
             --
             1
```


Подберем число, которое, будучи умножено на 1 (последний остаток в алгоритме Евклида), к которому прибавляется или из которого вычитается 4 (первоначальный остаток), будет нацело делиться на 2 (последний делитель в алгоритме Евклида). Таким числом будет 6, поскольку

$$\frac{6-4}{2} = 1.$$

Поэтому мы должны добавить числа 6 и 1 к частным в алгоритме Евклида; имеем 3, 1, 1, 1, 6, 1. Выполняя действия в обратном порядке, мы имеем значения 7, 13, 20, 73.

После деления числа 73 на 29 получим остаток, равный 15. Это и будет значением x, удовлетворяющим исходному уравнению. Значение y легко найти: оно равно 4.

Чтобы найти величину x, удовлетворяющую второму уравнению, находим наибольший общий делитель по алгоритму Евклида:

```
17) 45 (2
    34
    ---
    11) 17 (1
        11
        ---
         6) 11 (1
             6
            ---
             5) 6 (1
                5
               ---
                1
```

Подберем число, которое, будучи умножено на 1 (последний остаток в алгоритме Евклида), к которому прибавляется или из которого вычитается 7 (первоначальный остаток), будет нацело делиться на 5 (последний делитель в алгоритме Евклида). Таким числом будет 3, поскольку

$$\frac{3+7}{5} = 2.$$

Поэтому мы должны добавить числа 3 и 2 к частным в алгоритме Евклида; имеем 2, 1, 1, 1, 3, 2. Выполняя действия в обратном порядке, мы имеем значения 5, 8, 13, 34. После деления 45 на 34 получим остаток, равный 11. Это и будет значением x, удовлетворяющим исходному уравнению. Значение z легко найти, оно равно 4.

Для нахождения значения x, удовлетворяющего обоим уравнениям, поступим, как прежде:

```
29) 45  (1
    29
    16) 29  (1
        16
        13) 16  (1
            13
             3) 13  (4
                12
                 1
```

Подберем число, которое, будучи умножено на 1 (последний остаток в алгоритме Евклида), к которому прибавляется или из которого вычитается 4 (разность между значениями x, удовлетворяющими первым двумя уравнениям), будет нацело делиться на 3 (последний делитель в алгоритме Евклида). Таким числом будет 2, поскольку

$$\frac{2+4}{3} = 2.$$

Поэтому мы должны добавить числа 2 и 2 к частным в алгоритме Евклида; имеем 1, 1, 1, 4, 2, 2. Выполняя действия в обратном порядке, мы получим числа 10, 12, 22, 34. После деления 34 на 45 получим остаток, равный 34. Тогда $34 \cdot 29 + 15 = 1001$. Это число и будет наименьшим числом, удовлетворяющим обоим уравнениям.

Аналогичные примеры и задачи приводятся в работах большинства индийских ученых.

Подобные задачи имеются в работах китайских математиков. Так, в «Математическом трактате» Сунь-Цзы, написанном в III—IV вв., приводится ряд теоретико-числовых задач на остатки [34, с. 91—92]. В этом трактате есть задачи на нахождение числа, которое при делении на 3, 5, 7 дает соответственно остатки 2, 3, 2. По-видимому, подобные задачи, так же как и в Индии, возникли в связи с календарно-астрономическими проблемами.

Связи между индийскими и китайскими математиками в области неопределенного анализа весьма вероятны; ученым обеих стран принадлежит заслуга в выделении подобного класса проблем и в стремлении найти решения неопределенных уравнений в целых положительных числах. Большое значение для развития науки имели исследования греческого ученого Диофанта, который приводил только рациональные решения.

Эти задачи появились в «Книге абака» Леонардо Пизанского в 1202 г.; примерно столетие спустя они встречаются в одной из византийских рукописей. В XV в. подобные задачи с различными числовыми данными приводятся в немецких арифметических руководствах, а в XVII в.— русских рукописных арифметических пособиях.

Геометрия и тригонометрия

Геометрия. Наиболее ранние геометрические сведения дошли до нас от эпохи Индской цивилизации. Об уровне знаний того времени можно судить косвенно по результатам археологических раскопок. Найден обломок линейки, который представляет собой узкую полоску раковины с нанесенными на нее делениями; видимо, она составляла часть измерительного инструмента большого размера. Следует отметить, что города долины Инда в древности планировались по какой-то заранее установленной геометрической схеме: улицы тянутся правильными параллельными линиями, пересекающимися под прямым углом. Один из городов был расположен на территории, напоминающей по форме трапецию, три угла которой можно проследить довольно отчетливо. При раскопках найдено большое число разнообразных предметов, имеющих правильную геометрическую форму. Это, например, разнообразные металлические конусы и предметы полусферической формы, служившие украшениями. Среди домашней утвари встретился сосуд в форме цилиндра; такой же формы и две печати-амулета, хотя обычно они были квадратными или прямоугольными.

Для индийских керамических изделий характерен абстрактный геометрический орнамент, лишь частично использовавшийся другими народами древнего мира. Наиболее распространенный орнамент в виде находящих друг на друга окружностей не встречается на посуде других древних культур. В тех случаях, когда сосуд для правильности нанесения рисунка предварительно размечали на квадраты, круги выведены более тщательно. Часто применяли орнамент с рисунком наподобие большого гребня, с солнечным знаком и другими эмблемами, которые трудно определить. Другой, также распространенный орнамент состоит из черных и красных клеток, чередующихся в шахматном порядке.

При построении окружностей, по-видимому, применялся специальный инструмент, аналогичный современному циркулю. Для построения нескольких равных предметов также необходимо было пользоваться специальным измерительным прибором. При изготовлении одинаковых по форме, но различных по величине предметов нужно было знать основы подобия — элементарные, чаще всего полученные эмпирическим путем сведения о центре подобия и о коэффициенте пропорциональности.

Многие элементы геометрического орнамента размещали на внутренней вогнутой или на внешней выпуклой стороне сосудов, что требовало знаний о проекциях.

До нас дошло большое количество оружия — различные топоры, секиры,— которые представляют прекрасные образцы осевой симметрии во всех трех измерениях: по длине, ширине и высоте. Примеры строгой осевой симметрии дают нам и изделия из раковин, предназначенные

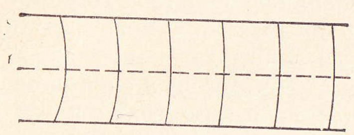


Рис. 1

по-видимому, для украшений. В ряде случаев построение невозможно без предварительного составления чертежа, а затем перенесения его на раковину, что также требует знаний о подобии, пропорции и проекции.

Древние индийцы должны были решать ряд геометрических задач на построение и преобразование: построение прямой, замкнутой, кривой, ломаной линий; прямого угла и перпендикуляра; квадрата, четырехугольника, окружности, многоугольника; куба, параллелепипеда, деление отрезка пополам и на равные части; деление круга пополам и на четыре равные части, деление сферы пополам, построение сектора и сегмента окружности, концентрических окружностей, параллельных линий.

Мы не знаем, как в большинстве случаев выполнялись такие построения, так как известен конечный результат. Но иногда можно судить и о способах построения. Так, для того чтобы построить линию, параллельную двум данным параллельным прямым, древний математик между

двумя прямыми проводил на равном расстоянии друг от друга части концентрических окружностей (рис. 1). Для этого ему нужно было пользоваться, во-первых, циркулем, во-вторых, прибором для измерения равных отрезков. Через середины этих дуг он проводил третью прямую, которая, проходя на равном расстоянии между двумя параллельными прямыми, сама была параллельна им.

В строительстве применялись специальные инструменты для проведения прямых линий, построения прямых, вертикальных, смежных углов и для их измерения, для определения расстояния до данных предметов. Для решения многих задач практики нужны были знания площадей и объемов основных геометрических фигур, хотя мы не знаем, как точно древние индийцы вычисляли их.

Один из разделов ведийской литературы носит название «Шульба-сутра». Это трактаты, связанные с правилами измерений и построений различных жертвенных алтарей. Сам термин «шульба» означает «веревка», «струна», «канат», «нить», а корень «шульб»— действие или процесс измерения; «сутра» — это «наставление», «руководство», «правило». Поэтому трактаты могут быть переведены как «Правила веревки».

«Шульба-сутра» дошла в нескольких редакциях: Баудхайаны, Манавы, Апастамбы, Катиайаны и некоторых других.

Постройка алтарей регламентировалась следующими правилами: они ориентировались по странам света; в их основании лежали строго определенные фигуры; основания были либо подобными с целочисленными коэффициентами пропорциональности, либо различными геометрическими фигурами, но равновеликими по площади. Все это приводило к решению следующих геометрических задач: построение прямого угла, квадрата, прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами, построение из них трапеций, преобразование прямоугольника в равновеликий квадрат, построение квадрата, равновеликого сумме или разности двух данных квадратов.

Здесь встречаются утверждения, сходные с теми, которые позднее можно найти в эллинистической науке. Так, прямую линию можно делить на бесконечное число равных частей; круг можно разбить диаметрами на любое число частей; каждая диагональ делит прямоугольник пополам, а обе диагонали в точке пересечения делятся пополам, при этом прямоугольник делится на четыре части; прямая линия, соединяющая вершину с серединой противоположной стороны, делит равносторонний треугольник на две равные части; параллелограммы, построенные на одном и том же основании и между теми же параллельными линиями, равны между собой.

Для преобразования квадрата в равновеликий прямоугольник на рис. 2 проведем диагональ AC, тогда квадрат разделится пополам. Затем прямой ED разобьем его еще раз пополам. Равные треугольники ADE и EDC построим на сторонах квадрата AB и BC. Прямоугольник $FGCA$ будет равновелик исходному квадрату $ABCD$. Если необходимо удвоить квадрат $ABCD$, то его аналогичным образом достраивают до квадрата $FGKH$, который и будет иметь площадь, в 2 раза большую исходного квадрата.

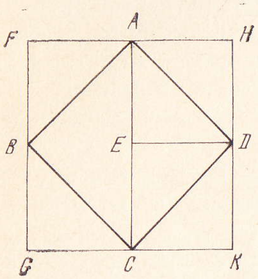


Рис. 2

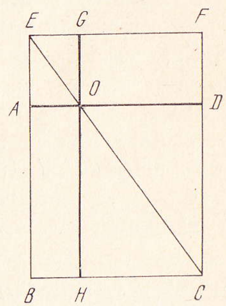


Рис. 3

Для преобразования квадрата в прямоугольник, сторона которого дана, необходимо выполнить следующие преобразования: на продолжении стороны AB искомого квадрата $ABCD$ отложим BE, равную стороне прямоугольника. Прямая EC пересечет сторону AD в точке O; выполнив необходимые построения, указанные на рис. 3, мы найдем, что $FCHG$ и будет прямоугольником, площадь которого равна площади данного квадрата, поскольку прямоугольники $AOHB$ и $GODF$ равновелики.

Во всех геометрических построениях важное место занимает теорема Пифагора, которая формулируется следующим образом: «Диагональ прямоугольника создается теми же двумя площадями, которые создаются отдельно ее двумя сторонами» [74, с. 147]. Составители «Шульба-сутры» применяли шесть прямоугольных треугольников с целыми сторонами: 3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17;

7, 24, 25; 12, 35, 37; 15, 36, 39. Из этих и подобных им треугольников составлялись равнобедренные трапеции. С помощью теоремы Пифагора производилось и удвоение, утроение и т. п. данного квадрата, а также преобразование данного прямоугольника в квадрат.

В «Шульба-сутре» даны точные и приближенные правила нахождения площадей треугольника, параллелограмма, трапеции, объемов призмы, цилиндра, усеченной призмы.

Среди проблем, которые рассматривают геометры шульб, интерес представляет проблема квадратуры круга и ее обратная задача построения круга, равновеликого по площади данному квадрату. При этих проблемах число π имеет разные приближения, в том числе 3,004; 3,088 и, наконец, 3,16049.

Новый толчок к развитию геометрии дал в своем трактате Ариабхата. Площадь треугольника он определяет как произведение высоты на половину основания [часть II, правило 6]; это соотношение имелось в шульбах и у большинства индийских математиков. Площадь круга, приведенная Ариабхатой в части II, правиле 7, равна половине длины окружности, умноженной на половину диаметра, т. е. $S = \pi r^2$.

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту. Площадь любой плоской фигуры, отмечает Ариабхата в части II, правиле 9, можно найти, если выделить две стороны и затем перемножить их. Комментатор Парамешвара отмечает, что здесь речь идет о средней длине и ширине. Схожее правило позднее применялось Брахмагуптой, который для нахождения площадей треугольника и четырехугольника применял приближенную формулу

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}.$$

Впрочем, для вычисления площадей треугольника и четырехугольника Брахмагупта приводит и так называемую формулу Герона:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где p — полупериметр, a, b, c, d — стороны. Эта формула верна лишь для циклических, т. е. вписанных в круг, четырехугольников, но Брахмагупта явно не оговаривает этот факт.

Объем пирамиды Ариабхата находит как произведение площади основания на половину высоты. Это довольно грубое приближение уточняется другими математиками, например Шридхарой, который определяет объем как произведение площади основания на треть высоты. Объем сферы Ариабхата вычисляет по формуле $\pi r^2\sqrt{\pi r^2}$, что равно $1{,}47\pi r^3$; эта формула является приближенной по сравнению с точной формулой объема сферы $^4/_3\pi r^3$, которая приведена Бхаскарой II.

Одной из важнейших математических постоянных величин, имевшей большое прикладное значение, было вычисление числа π — отношения длины окружности к диаметру. Различные приближения этого значения встречаются уже в «Шульба-сутре». В «Сурье-сиддханте» приводятся два значения π, приближенно равные 3,06 и 3,08.

С довольно большой для своего времени точностью это значение вычислил Ариабхата: «Прибавь 4 к 100, умножь на 8 и прибавь ко всему этому 62 000. То, что получишь,— приближенное значение длины окружности, если ее диаметр 20 000» [часть II, правило 10]. Иными словами,

$$\pi = \frac{8(100+4)+62\,000}{20\,000} = \frac{62\,832}{20\,000} = 3{,}1416.$$

Это же значение приведено знаменитым среднеазиатским ученым Хорезми в его «Краткой книге об исчислении алгебры и альмукабалы»: «...ты умножаешь диаметр на шестьдесят две тысячи восемьсот тридцать два, а затем делишь это на двадцать тысяч, тогда частное — это окружность» [29, с. 52].

Другие приближения для π, приведенные индийскими математиками, это $\sqrt{10}$ у Брахмагупты и Шридхары, 22/7 у Ариабхаты II и Бхаскары II. Эти два последних приближения были известны и другим народам в древности, например грекам и китайцам. В V в. китайские математики вычислили π с большой степенью точности: ими было предложено приближение 355/113, верное в шести знаках после десятичной запятой. Это же приближение появилось в индийских работах XV в. Следует отметить огромный вклад, внесенный южноиндийскими математиками, в частности Нилакантой. Вычисленное им значение числа π имеет десять верных цифр после запятой, хотя в начале

XV в. ал-Каши вычислил π с 16 верными десятичными знаками.

В части II, правиле 14 Ариабхата приводит теорему Пифагора: «Прибавь квадрат высоты гномона к квадрату ее тени. Квадратный корень из этой суммы есть радиус небесного круга».

В части II, правиле 13 он дает ряд предложений: «Круг образуется вращением, треугольник и четырехугольник — с помощью гипотенузы или диагонали; горизонтальная [линия] определяется водой, перпендикуляр — отвесом». В части II, правилах 15, 16 им определяется пропорциональность сторон в двух подобных треугольниках. Ариабхата пишет: «Умножь высоту гномона на расстояние между гномоном и источником света и раздели на разность между высотой гномона и высотой источника света. Частное будет длиной тени, измеренной от основания гномона» (рис. 4).

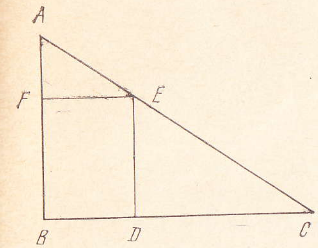


Рис. 4

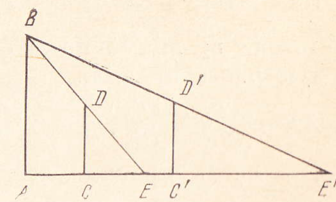


Рис. 5

Таким образом, если AB — высота источника света, ED — высота гномона, то длину тени можно определить из выражения

$$DC = \frac{DE \cdot BD}{AF}.$$

Видимо, Ариабхата знал о подобии треугольников AFE и EDC, знал он и о пропорциональности сторон в подобных треугольниках.

Следующее правило [14, части II] таково: «Расстояние между концами двух теней умножь на длину тени и раздели на разность между длинами двух теней; это дает расстояние от основания высоты светила до конца тени. Этот [результат], умноженный на высоту гномона и деленный на длину тени, дает высоту источника света» (рис. 5).

Из этого правила следует, что Ариабхата знал не только о подобии треугольников, но имел представления об основных свойствах пропорции. Действительно, из подобия пары треугольников DCE и ABE имеем

$$\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{DC},$$

из подобия другой пары треугольников $D'C'E'$ и ABE' находим

$$\frac{AE'}{C'E'} = \frac{AB}{D'C'},$$

поскольку $DC = D'C'$, то правые части пропорций равны, значит равны и левые

$$\frac{AE}{CE} = \frac{AE'}{CE'}.$$

Используя свойства производных пропорций, можно получить отношение

$$\frac{AE}{CE} = \frac{AE' - AE}{C'E' - CE}.$$

Принимая во внимание, что $AE' - AE = EE'$, получаем первую часть правила

$$AE = \frac{CE \cdot EE'}{C'E' - CE}.$$

Вторая часть правила легко выводится из подобия треугольников ABE и CDE, таким образом, $AB = \dfrac{AE \cdot CD}{CE}$.

Мы видим, что Ариабхата знал о подобии треугольников; был информирован об основных свойствах пропорции; имел представление о производных пропорциях.

Интересно приводимое в части II, правиле 17 соотношение между диаметром и хордой, пересекающимися в круге: «В круге произведение двух отрезков диаметра равно квадрату полухорды двух дуг». Таким образом, если на рис. 6 через a и b обозначить отрезки диаметра, а через c полухорду, то соотношение между этими отрезками, согласно Ариабхате, таково: $ab = c^2$.

Это, как и другие высказывания, Ариабхата приводит без доказательства и без выводов. Но из этого правила можно сделать заключение, что Ариабхате должны были быть известны свойства диаметра, перпендикулярного к хорде, поскольку речь идет о полухорде, а также соотношение между отрезками двух хорд, пересекающихся в круге.

В части II, правиле 18 приводится правило для нахождения частей диаметров двух пересекающихся окружностей (рис. 7). Ариабхата без доказательства приводит две формулы:

$$AE = \frac{AB(d - AB)}{D + d - 2AB}, \qquad EB = \frac{AB(D - AB)}{D + d - 2AB},$$

где d и D — соответственно диаметры меньшей и большей окружностей. Вывод формул не приводится, дается лишь конечный результат, поэтому попытаемся дать свою возможную интерпретацию вывода этих формул.

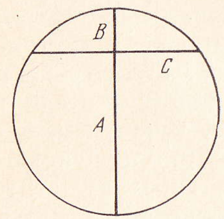


Рис. 6

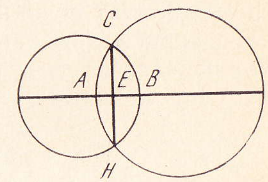


Рис. 7

В соответствии с предыдущим правилом для каждого круга можно составить соотношения:

$$BE = (d - BE) = CE^2, \tag{1}$$

$$AE(D - AE) = CE^2, \tag{2}$$

или

$$\frac{d - BE}{CE} = \frac{CE}{BE}, \qquad \frac{AE}{CE} = \frac{CE}{D - AE}.$$

Почленно вычтем из первого равенства второе

$$\frac{d - BE}{CE} - \frac{AE}{CE} = \frac{CE}{BE} - \frac{CE}{D - AE}$$

или

$$\frac{(d - BE) - AE}{CE} = \frac{CE[(D - AE) - BE]}{BE(D - AE)}.$$

Переставив частично средние члены пропорции, получим

$$\frac{d - AB}{D - AB} = \frac{CE^2}{BE(D - AE)}.$$

Заменяя на выражение из (2), имеем

$$\frac{d-AB}{D-AB}=\frac{AE}{BE}.$$

Используем свойство производных пропорций

$$\frac{d-AB}{D-AB+d-AB}=\frac{AE}{AE+BE}, \quad \frac{d-AB}{D+d-2AB}=\frac{AE}{AB},$$

отсюда получаем искомый результат

$$AE=\frac{AB\,(d-AB)}{D+d-2AB}.$$

Аналогично можно вывести и другую формулу.

Тригонометрия. Уже древнейшая из сиддхант «Пулиса-сиддханта» познакомила индийцев с тригонометрией хорд александрийских астрономов. Если греки называли хорды «прямыми в круге», то индийцы стали называть их словом «джива» или «джья», буквально — «тетива», а перпендикуляр, опущенный из середины дуги на середину стягивающей ее хорды,— «стрелой». Варахамихира в «Панча-сиддхантике» заменил хорду полухордой, т. е. линией синуса. Первоначально она называлась «ардха-джива» или «ардха-джья» — «полутетива», затем слово «ардха» было отброшено и линию синуса стали называть просто «джива» или «джья». Отсюда и происходит наше слово «синус»: арабские переводчики сиддхант не перевели слово «джива» арабским словом «ватар», означающим «тетива» и «хорда», а транскрибировали — джиба. Так как в арабском языке краткие гласные не обозначаются, а долгое «и» в слове «джиба» обозначается так же, как полугласная «й», арабы стали произносить название линии синуса «джайб» буквально — «впадина», «пазуха». При переводе арабских сочинений на латынь европейские переводчики перевели слово «джайб» латинским словом «sinus», имеющим то же значение.

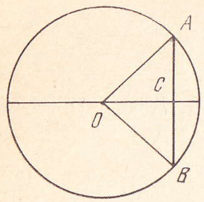


Рис. 8

Для вычислений замена хорд синусами несущественна, так как хорда дуги α равна удвоенному синусу дуги 2α. Но эта замена позволяет вводить различные функции, связанные со сторонами и углами прямоугольного треугольника.

Кроме линии синуса, индийцы пользовались линией косинуса («котиджива» или «котиджья») и линией синуса-версуса, т. е. разностью между радиусом и линией косинуса (эту линию они называли «уткрамаджива» или «уткрамаджья»). На рис. 8 изображены хорда AB дуги AB и линии синуса AC, косинуса OC и синуса-версуса CD дуги AD.

Индийцы рассматривали тригонометрические величины только для дуг первой четверти. В «Панча-сиддхантике» приводятся простейшие соотношения между синусом и синусом-версусом, выражаемые нашими формулами:

$$\sin^2\alpha+\sin\operatorname{vers}^2\alpha=4\sin^2\frac{\alpha}{2}, \qquad \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\operatorname{vers}\alpha}{2},$$

которые позволяли находить синус половинной дуги.

Варахамихира приводит и иное соотношение между тригонометрическими величинами:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

К этим формула Брахмагупта добавляет следующие:

$$\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\cos\alpha, \quad \sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sin\alpha.$$

Ариабхата II приводит соотношение

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1\pm\sin\alpha}{2}},$$

а Бхаскаре II было известно разложение

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

В части II, правиле 12 Ариабхата словесно дает такое выражение:

$$\sin(n+1)\alpha-\sin n\alpha=\sin n\alpha-\sin(n-1)\alpha-\frac{\sin n\alpha}{225},$$

которое ему необходимо для составления таблицы синусов.

Ариабхата делил круг вначале на 360 частей, а затем еще на 60, в итоге круг делился на 21 600 частей. Таким образом, за единицу измерения линий синуса, косинуса и синуса-версуса принималась дуговая минута. Если принять π равным 3,1416, то величина радиуса будет равна $21600/2\pi = 3437{,}7$, или, округленно, 3438 единицам. Эта же величина равна числу минут в радиане.

Наиболее ранняя в истории науки таблица синусов имеется в «Сурье-сиддханте» и в «Ариабхатии» [часть I, правило 10]. Таблица составлена через каждые $3°45' = 225'$, т. е. через 1/24 часть дуги квадранта.

Правило Ариабхаты для вычисления таблицы синусов таково: «[Двадцать четыре] синуса, вычисленные в минутах дуги, есть 225, 224, 222, 219, 215, 210, 205, 199, 191, 183, 174, 164, 154, 143, 131, 119, 106, 93, 79, 65, 51, 37, 22, 7» [часть I, правило 10]. Для угла $3°45' = 225'$ это же значение принималось за $R \sin \alpha$, второе значение Ариабхата получал, прибавляя к первому $224'$, третье значение Ариабхата получал, прибавляя $222'$ ко второму значению, и т. д. Эти разности можно было найти по формуле Ариабхаты, которая приведена выше.

Таблица синусов в большей части верна до последнего знака. Последующие ученые привели еще более точные значения синуса, а Бхаскара II вычислил таблицу синусов через 1°.

По этой таблице легко вычислить значения и синуса-версуса, т. е. $R - R \cos \alpha$; для этого надо из 3 438 вычесть в обратном порядке значения синуса.

Ариабхата и другие индийские математики широко использовали тень, отбрасываемую вертикальным шестом — гномоном, для определения высот и расстояний. Несколько подобных правил и задач разобраны в геометрическом разделе. Это предвосхитило введение тангенса и котангенса, которые в IX в. ввели математики арабоязычных стран; кстати, эти функции носили названия «тени».

Астрономия

Основным источником сведений о развитии астрономии в Индии до эпохи Ариабхаты являются сиддханты. Эти сочинения, существовавшие в пяти различных редакциях, описаны и изучены Варахамихирой в его трактате «Панча-сиддхантика». Время составления всех сиддхант датируется III—IV вв. н. э. На протяжении длительного времени они изучались, комментировались, дополнялись, перерабатывались. Исследователи полагают, что источником одной из них — «Паулисы-сиддханты» сочинение греческого астронома и астролога Паулоса (Павла) из Александрии. Эта сиддханта содержит приближенные правила определения координат географических пунктов и светил на небесной сфере, дает простейшие способы вычисления затмений. Название «Ромака-сиддханта» также говорит о возможном эллинистическом влиянии (Рома — Рим).

Наибольший интерес представляет «Сурья-сиддханта» — сочинение, сыгравшее исключительно важную роль в истории индийской астрономии. Эта сиддханта неоднократно комментировалась многими астрономами, в том числе и Ариабхатой, и сохранилась в нескольких редакциях. Она состоит из 14 разделов, в которых рассматриваются вопросы, связанные с определением времени и координат небесных тел, движением планет, с лунными и солнечными затмениями, нахождением относительного положения планет и созвездий, описанием астрономических приборов и инструментов, с некоторыми географическими проблемами.

В формировании научного содержания сиддхант наряду с древней индийской традицией определенную роль сыграла эллинистическая наука. Индийцы были знакомы как с доптолемеевскими методами ортогонального проектирования, так и с теориями движения Солнца, Луны и планет, изложенными в «Алмагесте» Птолемея (II в.). Решение астрономических задач было основано на применении принципов гномоники. Гномон — это вертикальный шест постоянной длины; согласно «Сурья-сиддханте» и данным Бируни, его длина составляет 12 пальцев. Измерялась длина отбрасываемой гномоном тени, которая изменяется в течение дня в зависимости от высоты Солнца. Учению о тени гномона посвящена одна из глав «Лилавати» Бхаскары II [36]. Гномон и его тень фигурирует и во многих задачах тригонометрии. Эллинистические же методы решения треугольников в Индии не привились.

В связи с постановкой астрономических задач индийцы пришли к понятию функциональной зависимости между величинами. В астрономических сочинениях они пользовались двумя способами задания функции: графическим, основанном на методах гномоники, и тригонометрическим. Оба способа имеют вид словесных расчетных правил, обычно составленных в стихах. В некоторых случаях словесные рекомендации дополнялись таблицами.

В соответствии с учением сиддхант Ариабхата представлял Землю в виде неподвижной сферы, центр которой совпадает с Вселенной. Он пишет: «Земная сфера, будучи совершенно круглой, расположена в центре Вселенной, в середине круга созвездий, окруженная орбитами планет...» [часть IV, правило 6]. Об этом же он пишет и в части III, правиле 15: «... Земля расположена в центре Вселенной...». Созвездия вместе с Солнцем и Луной и другими планетами двигаются с востока на запад, совершая полный оборот за один день. «Планеты, двигаясь равномерно, [проходят одно и то же расстояние каждый день] на своих орбитах...» [часть III, правило 12]. Каждая планета, находясь на различном расстоянии от Земли, имеет свою собственную орбиту, которую она проходит за различное время: «Луна, будучи ниже, проходит свою маленькую орбиту за короткое время; Сатурн, будучи выше всех других, проходит свою большую орбиту за более длительное время» [часть III, правило 13]. Далее Ариабхата замечает: «Ниже созвездий расположены Сатурн, Юпитер, Марс, Солнце, Венера, Меркурий и Луна, а ниже их находится Земля, расположенная в центре Вселенной...» [часть III, правило 15].

Ариабхата указывает: «Знаки зодиака [двенадцать в

круге] известны как малые в малом круге и большие в большом круге. Также градусы и минуты являются одним и тем же числом на различных орбитах» [часть III, правило 14].

В своем движении с запада на восток планеты кажутся движущимися с различными скоростями. Иногда их движение кажется даже попятным. «Сурья-сиддханта» описывает эти движения планет следующими словами: «Движение планет может быть восьми видов: обратное, немного обратное, поперечное, медленное, очень медленное, равномерное, а также быстрое и очень быстрое» [79, глава II, правило 12].

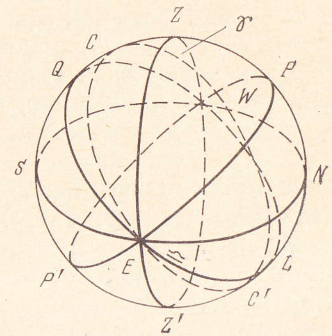


Рис. 9

Небесную сферу Ариабхата представляет следующим образом: отвесная линия, проходящая через глаз наблюдателя, пересекает небесную сферу в двух точках: в зените Z и надире Z'. Плоскость, проходящая через наблюдателя перпендикулярно отвесной линии и пересекающая небесную сферу по большому кругу $NESW$, есть небесный горизонт. Горизонт проходит через четыре основные точки сферы: север, восток, юг, запад. Большой круг $NZSZ'$, проходящий через точки север, юг, зенит и надир,— небесный меридиан; большой круг $EZWZ'$, проходящий через точки восток, запад, зенит, надир,— первый вертикал.

Большой круг $QELW$ — небесный экватор, P — северный полюс, P' — южный полюс. Угловое расстояние полюса от горизонта равно широте φ, на которой находится наблюдатель. Оно равно зенитному расстоянию $90° - \varphi$ точки Q, в которой небесный экватор пересекает меридиан. Суточное движение планет и созвездий происходит по малым кругам, параллельным экватору.

«Имеется круг, [проходящий через точки] востока и запада, и другой круг, [проходящий через точки] севера и юга,— пишет Ариабхата.— Оба они проходят через зенит и надир. Имеется горизонтальный круг — горизонт, над которым небесные тела восходят и заходят. Линия восток — запад, линия север — юг и перпендикуляр, проведенный от зенита к надиру, пересекаются в точке, где находится наблюдатель» [часть IV, правила 18—20].

«Круг, который пересекает точки востока и запада и две точки на меридиане, [расположенные] выше и ниже горизонта на величину широты [места] наблюдения, называется унмандала. На этом круге измеряется увеличение и уменьшение дня и ночи» [часть IV, правило 19]. В этом правиле определяются восточный и западный часовые круги, которые проходят через полюса. Наибольший интерес из них представляет шестичасовой круг, на котором, согласно Ариабхате, измеряется увеличение и уменьшение дня.

Ариабхата также приводит значение наклона эклиптики к экватору («наибольшее склонение») $\varepsilon = 24°$ (современное значение $23° 27'$). Для определения координат небесных тел индийцы употребляли горизонтальную, экваториальную и эклиптическую системы координат. В горизонтальной системе высота или зенитное расстояние определялись аналогично тому, как это делается в современной астрономии, но азимут отсчитывался от первого вертикала или от восточной или западной точки горизонта, чтобы он не превышал 90°. Круг азимута, называемый дринмандала, определяется Ариабхатой следующим образом: «Вертикальный круг, который проходит через место, где находится наблюдатель и планету, называется дринмандала...» [часть IV, правило 21].

В экваториальной системе двумя координатами являются склонение, или кранти (угловое расстояние δ светила от экватора) и восхождение, отсчитываемое по кругу экватора. В эклиптической системе положение тела определяется ее широтой и эклиптической долготой λ, измеряемой от некоторой фиксированной точки на эклиптике, например точки весеннего равноденствия ♈. Индийские астрономы вычисляли и часовой угол.

Когда Солнце находится в точках равноденствия в начале созвездий Овна и Весов, его зенитное расстояние в меридиане равно широте места, в котором находится на-

блюдатель. Это легко определяется измерением равноденственной тени AH, отбрасываемой гномоном OA. Пусть $OA = g$, $AH = S_e$, $OH = h$, тогда $h = \sqrt{g^2 + S_e^2}$.

Широта φ и дополнение широты до 90° : $90 - \varphi$ определяются по формулам

$$R \sin \varphi = \frac{RS_e}{\sqrt{g^2 + S_e^2}}, \qquad R \sin (90 - \varphi) = \frac{Rg}{\sqrt{g^2 + S_e^2}},$$

откуда

$$S_e = \frac{g \sin \varphi}{\sin (90 - \varphi)}.$$

Синус широты в этом случае Ариабхата называет «равноденственным синусом». Для любого склонения δ_1 светила в северной части небесной сферы или δ_2 в южной части его зенитное расстояние в меридиане Z_1 и Z_2 определяется следующим образом:

$$R \sin Z_1 = \frac{R \cdot S_1}{h_1}, \qquad R \sin Z_2 = \frac{R \cdot S_2}{h_2},$$

где S_1, S_2 — тени и h_1, h_2 — соответствующие гипотенузы треугольников AOH_1 и AOH_2. Из рис. 10 имеем $\varphi = Z_1 + \delta_1$; $\varphi = Z_2 + \delta_2$. Таким образом, $\varphi = Z \pm \delta$.

Отсюда можно сделать заключение, что склонение Солнца может быть найдено по широте места и зенитному расстоянию в меридиане. Аналогичным образом можно определить «наибольшее склонение», т. е. величину наклона эклиптики. В «Сурье-сиддханте» [79, глава II, правило 28] приведено соотношение между склонением, долготой и наклоном эклиптики: «Синус наибольшего склонения есть 1 397, на это следует умножить любой синус и разделить на радиус; дуга, соответствующая результату, будет склонением».

Согласно Бхаскаре I [44, глава III, правило 6], по данной эклиптической долготе светила можно определить его склонение:

$$R \sin \delta = \frac{1397 \cdot R \sin \lambda}{R} = \frac{R \sin \varepsilon \cdot R \sin \lambda}{R},$$

где δ — склонение Солнца, ε — наклон эклиптики, равный 24°, $R \sin \varepsilon = 1397'$, λ — долгота Солнца, R — радиус небесной сферы, который индийские астрономы считали равным 3438. Эту формулу легко получить с помощью простейших геометрических преобразований, исходя из свойств сферического треугольника. Пусть на рис. 11 ΥMQ — экватор, ΥSc — эклиптика, S — Солнце, $\Upsilon S = \lambda$ — долгота Солнца (эклиптическая), $S\Upsilon M = CQ = \varepsilon$ —

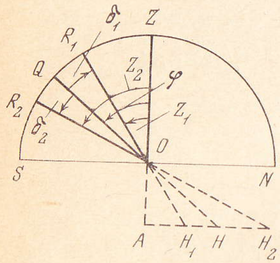


Рис. 10

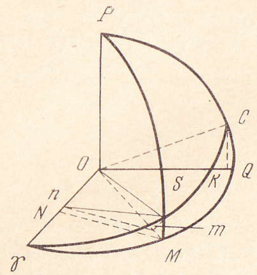


Рис. 11

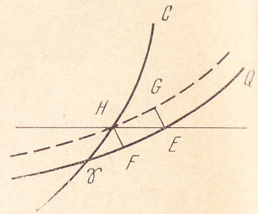


Рис. 12

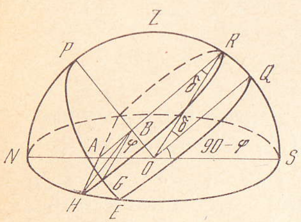


Рис. 13

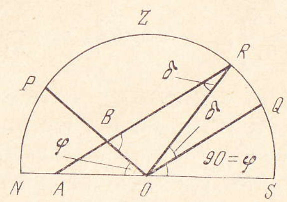


Рис. 14

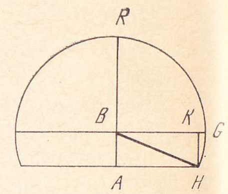


Рис. 15

наклон эклиптики, $SM = \delta$ — склонение Солнца; треугольники COK и Snm — подобны. Следовательно, $\frac{Sm}{Sn} = \frac{CK}{OC}$, или $\frac{R\sin\delta}{R\sin\lambda} = \frac{R\sin\varepsilon}{R}$, откуда $R\sin\delta = \frac{R\sin\varepsilon\cdot R\sin\lambda}{R}$.

«Разность восхождений», или «уравнение дня» $\Delta\alpha$, как называли его позже в арабоязычной литературе,— это дуга суточного круга Солнца между горизонтом и кругом склонения, проходящим через точки востока и запада. Кроме того, она определяется и как разность восхождений в «прямой» (прямое восхождение) и «наклонной» сферах (наклонное восхождение), т. е. между восхождением светила на экваторе ($\varphi = 0$) и его восхождением на данной широте ($\varphi \neq 0$).

Правило для ее нахождения индийские ученые получали следующим образом. На рис. 12 H — точка восхода светила на эклиптике ΥHC, Υ — точка весеннего равноденствия, ΥEQ — экватор, E — точка востока. Разность восхождений FE есть разность между наклонным восхождением ΥE и прямым восхождением ΥF точки H. FE также равна дуге HG или углу HBG, который представляет собой разность в часах восхождений Солнца на горизонте и на шестичасовом круге.

На рис. 13 и 14 NES — горизонт, EQ — экватор, P — полюс, Z — зенит, HGR — суточный круг Солнца или звезды, PGE — шестичасовой круг, $\angle POH$ равен широте места φ и $\angle ROQ = \angle BRO$ — склонение Солнца и звезды δ. Двумя важными элементами в этом построении являются радиус RB суточного круга, который называется «дневным радиусом», и отрезок диаметра шестичасового круга. Этот отрезок называется «земным синусом». Следовательно, «дневной радиус» $BR = R\cos\delta$, «земной синус» $AB = OB\,\mathrm{tg}\,\varphi = R\sin\delta\cdot\mathrm{tg}\,\varphi$. Разность восхождений $\Delta\alpha$, измеряемую углом HBG, находим из соотношения

$$R\sin\Delta\alpha = \frac{R\cdot HK}{BH} = \frac{R\cdot AB}{BR} = \frac{R\cdot R\sin\delta\cdot\mathrm{tg}\,\varphi}{R\cos\delta} = R\,\mathrm{tg}\,\delta\cdot\mathrm{tg}\varphi$$

или

$$R\sin\Delta\alpha = \frac{\text{Радиус}\cdot\text{Земной синус}}{\text{Дневной радиус}}.$$

Правило Ариабхаты для нахождения прямого восхождения знаков зодиака таково (рис. 15): «Умножь дневной радиус круга наибольшего склонения на синус требуемого знака зодиака и раздели на радиус дневного круга требуемого знака зодиака. Результат будет равен прямому восхождению требуемого знака начиная с Овна» [часть IV, правило 25].

В основе теории движения небесных тел в индийской астрономии лежат эксцентрическая и эпициклическая модели. Впервые понятия эксцентра и эпицикла встречаются у греческого математика Аполлония Пергского (III в. до н. э.), а понятие эпицикла встречаются еще ранее, у Гераклида Понтийского (IV в. до н. э.). Во II в. до н. э. греческий астроном Гиппарх разработал теорию движения Солнца, основываясь на понятии эксцентра, и теорию движению Луны, исходя из простой эпициклической модели. Во II в. н. э. александрийский ученый Птолемей, исходя из эпициклической и эксцентрической гипотез, разработал и теорию движения планет. Сочинения Гиппарха известны в отрывках, поэтому основным источником для изучения теории движения Солнца, Луны и планет в эллинистической науке является «Алмагест» Птолемея.

Сущность эксцентрической и простой эпициклической моделей состоит в следующем [26]: пусть на рис. 16 точка O — глаз наблюдателя, точка, которая, по представлению греческих и индийских астрономов, является центром мира и центром окружности видимого движения Солнца — эклиптики. Согласно простой эксцентрической модели,

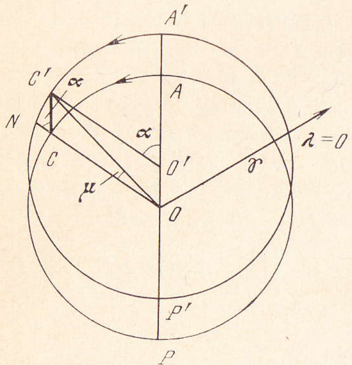


Рис. 16

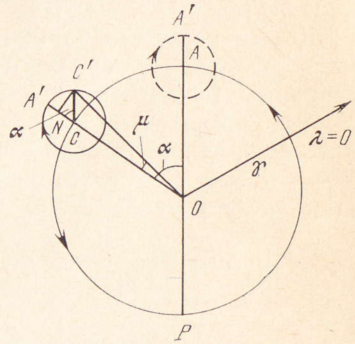


Рис. 17

неравномерность видимого движения Солнца объясняется тем, что оно движется равномерно («среднее движение»), но не по эклиптике, а по некоторому воображаемому эксцентрическому относительно этой точки кругу с центром O'. Тогда воображаемым равным перемещениям Солнца за равные промежутки времени по эксцентрическому кругу — эксцентру будут соответствовать неравные истинные перемещения по эклиптике. Движение его кажется более быстрым на участке эклиптики, расположенном ближе к эксцентру, и более медленным на ее противоположном участке. Когда тело перемещается по эклиптике от A к C, то на эксцентрическом круге оно переместится от A' к C'. На рис. 17, согласно простой эпициклической гипотезе, неравномерное движение Солнца C' объясняется тем, что оно движется равномерно по малому кругу — эпициклу — с центром в точке C радиуса CC', который в свою очередь

равномерно перемещается по большому кругу — деференту — с центром в точке O. В простейшем случае деферентом является эклиптика. Неравномерность движения Солнца следует из его различных положений на эпицикле при движении эпицикла по деференту. Кинематическая специфика этих моделей состоит в следующем: фигура $O'C'CO$ на рис. 16 представляет собой шарнирный четырехугольник, который может вращаться вокруг OO' — эксцентриситета светила, сохраняя форму параллелограмма. Абсолютное движение отрезка CC', т. е. его движение в плоскости чертежа относительно неподвижных осей, сводится к поступательному перемещению (звено CC' всегда останется параллельным звену OO'). В данном случае это движение будет круговым, т. е. все точки отрезка CC' опишут семейство одинаковых окружностей, центры которых будут лежать на OO'.

Если применить теорему кинематики о паре вращений к движению небесных тел, то из нее следует, что система эпицикла и деферента при условии равных и противоположных вращений эквивалентна эксцентрической модели. Эти модели использовались для объяснения движения Солнца и Луны, хотя уже для Луны они не вполне соответствовали данным наблюдений. Поэтому индийские астрономы, как ранее греческие, а впоследствии арабоязычные ученые, для объяснения движения планет пользовались усложненными моделями.

Обращаясь к движению планет, Ариабхата пользуется именно эксцентрической и эпициклической моделями, отмечая, что «все планеты двигаются при своем [среднем] движении по их орбитам и их эксцентрическим кругам от линии апсид к востоку и от точки узла к западу» [часть III, правило 17]. На рис. 16 отрезок $A'P'$, соединяющий апогей A' и перигей P' эксцентрической орбиты, есть линия апсид. Точка узла — это точка пересечения орбиты планеты с эклиптикой. Далее Ариабхата сообщает, что «эксцентрический круг каждой планеты равен орбите, по которой движется средняя планета. Центр эксцентрического круга находится вне центра Земли» [часть III, правило 18].

«Расстояние между центром Земли и центром эксцентрического круга равно радиусу эпицикла. Планеты движутся в их среднем движении по эпициклам» [часть III, правило 19]. «Эпициклы движутся к востоку от линии апсид и к западу от точки узла. Средняя планета, расположенная на своей орбите, появляется в центре своего эпицикла» [часть III, правило 21]. «Планета при своем ускоренном движении от линии апсид движется к западу по своему эпициклу. При своем замедленном движении от линии апсид она движется к востоку по своему эпициклу» [часть III, правило 20].

Для вычисления тени, отбрасываемой Землей или Луной во время затмения Луны, когда Земля оказывается между Солнцем и Луной, необходимо знать диаметры солнечного и лунного дисков, диаметр Земли и расстояния от Солнца и Луны до Земли. В различных астрономических трактатах приводятся разные значения этих величин.

Отношение диаметра к соответствующему расстоянию дает угловой диаметр Солнца или Луны в радианах. Следует отметить, что угловые диаметры Солнца и Луны у индийских астрономов примерно одни и те же и почти совпадают с современными значениями. Чтобы получить угловые диаметры в минутах, как следует из индийских астрономических текстов, они умножаются на радиус $R = 3438$, величину, эквивалентную числу минут в радиане. Так, Бхаскара II приводит такие значения для угловых диаметров Солнца и Луны: 32,5′ и 32′.

Величины диаметров Солнца и Луны взяты для их эксцентрических орбит. Требуется их исправить для истинного движения. Эту поправку можно сделать, умножив средние диаметры на отношение истинного суточного движения Солнца и Луны к среднему суточному движению. Так, если v_s' и v_s будут истинным и средним суточными движениями Солнца, v_m' и v_m — истинным и средним суточными движениями Луны, d_s' и d_s — истинным и средним диаметрами Солнца, а d_m' и d_m — истинным и средним диаметрами Луны, то между ними существуют такие соотношения:

$$d_s' = d_s \frac{v_s'}{v_s}, \qquad d_m' = d_m \frac{v_m'}{v_m}.$$

Ариабхата в части IV, правилах 39, 40 приводит следующие правила для величины тени Земли, измеряемой во время затмений:

$$\frac{\text{Длина земной тени}}{\text{Диаметр Земли}} = \frac{\text{Расстояние между Солнцем и Землей}\cdot\text{Диаметр Земли}}{\text{Диаметр Земли} - \text{Диаметр Солнца}},$$

$$\text{Диаметр тени Земли на лунной орбите} = \frac{(\text{Длина земной тени} - \text{расстояние от Луны до Земли}) \times \text{Диаметр Земли}}{\text{Длина земной тени}}.$$

На рис. 18 S, E и M — соответственно центры Солнца, Земли и Луны: $S_1S_2 = d_s$ — диаметр Солнца, $E_1E_2 = d_l$ — диаметр Земли, фигура OS_1S_2 — так называемый «конус тени», $ES = R_s$ — расстояние от Солнца до Земли, $EM = R_m$ — расстояние от Земли до Луны, $OE = L$ —

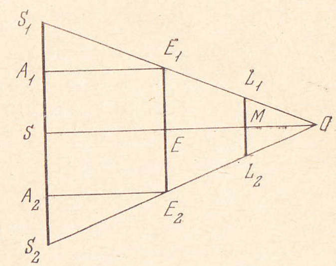


Рис. 18

длина земной тени, $L_1L_2 = S$ — диаметр тени на лунной орбите. Тогда

$$\frac{EO}{A_1E_1} = \frac{EE_1}{A_1S_1} = \frac{EE_2}{A_2S_2} = \frac{EE_1 + EE_2}{A_1S_1 + A_2S_2} = \frac{E_1E_2}{S_1S_2 - A_1A_2} = \frac{E_1E_2}{S_1S_2 - E_1E_2},$$

следовательно, $EO = \frac{ES \cdot E_1E_2}{S_1S_2 - E_1E_2}$, или $L = \frac{R_s d_e}{d_s - d_e}$,

затем $\frac{L_1L_2}{E_1E_2} = \frac{OM}{OE} = \frac{OE - EM}{OE}$,

следовательно, $L_1L_2 = \frac{E_1E_2(OE - EM)}{OE}$,

или $S = \frac{d_e(L - R_m)}{L}$.

Продолжая далее, находим $S = d_e - \frac{d_e R_m}{L}$.

Подставляя значение для L, имеем $S = d_e - \frac{d_e R_m (d_s - d_e)}{R_s d_e}$,

или $S = d_e - (d_s - d_e)\frac{R_m}{R_s}$.

На протяжении длительного периода времени брахманы излагали такой миф о причинах затмений: боги, получив «напиток бессмертия» — амриту, принялись пить его; когда же дракон Раху тайком подобрался к напитку и приложился к чаше, то Солнце и Месяц разоблачили его. В гневе бог Вишну отсек Раху голову, но так как амрита успела дойти до горла, то голова осталась бессмертной. С тех пор голова Раху, питая ненависть к Солнцу и Месяцу, вечно преследует их и время от времени пытается их проглотить — вот от чего происходят солнечные и лунные затмения [22, с. 30—34].

Ариабхата был первым, кто отошел от такого представления и привел научное объяснение солнечных и лунных затмений. «Луна затмевает Солнце, и Земля своей огромной тенью затмевает Луну. Когда в конце истинного лунного месяца, [т. е. в новолуние], Луна, находясь вблизи одной из точек пересечения орбит [Луны и Солнца], заслоняет Солнце, или когда в конце половины месяца, [т. е. в полнолуние], Луна входит в тень Земли, то это есть середина затмения, которое происходит иногда до, а иногда после конца истинного лунного месяца или половины месяца» [часть IV, правила 37, 38].

Эта научная теория вызвала критическую реакцию Брахмагупты; в главе 21 своей сиддханты он писал: «Среди людей есть такие, которые думают, что затмения не вызываются Головой. Это абсурдное мнение, ибо это она вызывает затмения, и большинство жителей мира говорят, что именно она вызывает их. В ведах, которые есть слово божие, из уст Брахмы говорится, что Голова вызывает затмения. Напротив того, Ариабхата, идя наперекор всем, из вражды к упомянутым священным словам утверждает, что затмение вызывается не Головой, а только Луной и тенью Земли... Эти авторы должны прекратить свое сопротивление большинству, ибо все, что есть в Ведах, в «Смрити» и в «Самхитах»,— верно».

Особый интерес вызывают рассуждения Ариабхаты о возможности движения Земли. Он говорит: «Как человек в лодке, движущейся вперед, кажется неподвижным предметом, двигающимся назад, так же точно на Ланке человек кажется неподвижным созвездиям, двигающимся назад в западном направлении по прямой линии» [часть IV, правило 9]. Позднейшие комментаторы интерпретировали это следующим образом. Наблюдатель, находясь на экваторе

Земли, вращающейся к востоку, кажется неподвижным небесным объектом, движущимся к западу. Как мы видим, речь идет о суточном вращении Земли. Это высказывание Ариабхаты подвергали критике не только жрецы, но и ряд позднейших астрономов. В начале VI в. его опровергал Варахамихира, а в VII в.— Брахмагупта, который писал: «Последователи Ариабхаты говорят, что Земля движется, а небо покоится. Но в их опровержение было сказано, что если бы это было так, то камни и деревья упали бы с Земли» [4, с. 254]. И далее: «Ариабхата полагает, что четыре юги суть четыре равные доли чатур-юги; следовательно, его мнение отличается от изложенной выше версии «Смрити», а имеющий отличное мнение — противник. А вот Паулиса заслуживает похвалы за то, что он сделал, ибо он не вступает в противоречие с книгой «Смрити»» [4, с. 328].

Особый интерес к этому высказыванию Ариабхаты проявил Бируни, когда знакомился с трудами индийских астрономов. Приводя слова Брахмагупты о том, что, если бы Земля вращалась, это не могло бы быть в гармонии и согласованности с «минутами неба» (минутами небесного экватора, называемыми индийцами «вздохами», так как каждая его минута, т. е. 1/60 градуса этого круга, проходится за время одного вздоха), Бируни говорит: «Предположим, что это верно и Земля совершает полный оборот к востоку за это число вздохов, как совершает его и небо, согласно его мнению, однако, где же препятствие гармонии и согласованности [вращения Земли и неба]? К тому же вращательное движение Земли нисколько не порочит астрономии, а все астрономические явления равно протекают в согласии с этим движением» [4, с. 255]. В то же время в другом своем труде — «Каноне Мас'уда» — Бируни отрицает вращение Земли, хотя и здесь подчеркивает, что это движение не противоречило бы принципам астрономии, но оно представляется невозможным по другим причинам [5, с. 218]. Эти причины — физического свойства. По мнению Бируни, если бы Земля двигалась так, то от нее отставало бы все, что отделено от нее: летящая птица, предмет, брошенный высоко к небу, или облако, висящее в воздухе [5, с. 272]. В то же время, как отмечалось выше, Ариабхата в своих представлениях о строении небесной сферы исходит из того, что Земля покоится в центре Вселенной.

Таким образом, можно предполагать, что Ариабхата, как и вслед за ним Бируни, считал движение Земли возможным лишь теоретически; в своих же практических расчетах он оставался на точке зрения неподвижности Земли. Его рассуждения о возможности движения Земли можно рассматривать как соображения в пользу относительного характера движения. «При благословлении бога,— писал Ариабхата,— драгоценные затонувшие сокровища истинного познания были спасены мною с помощью лодки моего собственного разумения из океана, который состоит из правильного и ложного знания» [часть IV, правило 49].

Изучая взгляды Ариабхаты и его последователей о сути мироздания, Бируни отмечает: «Сторонники Ариабхаты говорят: «Нам достаточно знать то пространство, которого достигают солнечные лучи, и нам нет нужды в том, куда они не добираются, хотя бы оно было очень велико само по себе. То, до чего не достигают солнечные лучи, не может быть познано чувственным восприятием, а недоступное чувству не может быть познано» [4, с. 217]. Можно говорить о приверженности Ариабхаты к философской школе локаятиков — единственному философскому направлению в истории индийской общественной мысли, которое полностью исключало идеалистическое истолкование естественных явлений. Эта позиция Ариабхаты нашла отражение в его научных концепциях, в частности в высказывании о вращении Земли вокруг своей оси и в теории солнечных и лунных затмений [8].

Следует отметить, что критике подверглись именно астрономические разделы сочинения Ариабхаты, тогда как математическая часть, не связанная с теологической традицией, была безоговорочно поддержана и получила дальнейшее развитие. Варахамихира и Брахмагупта не стали даже уточнять приближенные формулы объемов пирамиды и сферы (часть II, правила 6, 7). Брахмагупта развил далее метод Ариабхаты для решения неопределенного уравнения.

О судьбе Ариабхаты после 499 г.— года написания «Ариабхатии» — нам ничего не известно. «Мне не удалось найти ни одной книги Ариабхаты,— писал Бируни.— О его точке зрения я знаю только по изложению Брахмагупты, с его слов» [4, с. 327].

И все-таки идеи Ариабхаты нашли своих приверженцев и продолжателей не только в Индии, но и за ее пределами.

Заключение

Индийская наука оказала значительное воздействие на науку Китая, стран Ближнего и Среднего Востока и Средней Азии.

Вместе с тем на развитие науки в Индии оказали влияние греческая и древневавилонская культура. Так, Варахамихира приводит значения синодических периодов Сатурна и Юпитера и синодической дуги Венеры, совпадающие с вавилонскими. В астрологическом трактате «Яванаджатака» (III в.) употребляются вавилонские линейные методы вычисления планет.

Определенное влияние на индийскую астрономию оказала греческая наука. На это указывают, например, названия некоторых сиддхант: «Явана» (греческая), «Ромака» (римская, имеются в виду эллинистические страны). Индийские ученые заимствовали ряд греческих астрономических терминов — „липта" — „минута"; „хора" — „час", „гороскоп"; „кендра" — „аномалия"; „джьямитра" — „хорда". В своем астрологическом сочинении «Брихат-джатака» Варахамихира приводит названия знаков зодиака, которые также заимствованы из греческого языка [23].

Хотя толчком к развитию некоторых разделов астрономии и математики послужили вавилонские и греческие идеи, индийцы не просто слепо копировали их, а подвергли значительной и совершенно независимой переработке как в отношении общей теории, так и в отношении значений ряда числовых констант. Сравнение дошедшего до нас текста «Сурьи-сиддханты» [79], который датируется X в., и изложение этого трактата Варахамихирой в «Панчасиддхантике» наглядно показывает, что переработка и модификация продолжалась на протяжении многих веков.

В ряде случаев, например в тригонометрии, индийцы, основываясь на греческих идеях, осуществляли существенные преобразования, что послужило началом тригонометрии как учения о тригонометрических величинах.

Проникновение индийских астрономических и математических идей в Китай относится ко времени распространения в Китае буддизма. В VI—VII вв. с санскрита на древнекитайский язык были переведены некоторые астрономические сиддханты; возможно, что среди них была и «Ариабхатия». В VIII в. на древнекитайский был переведен трактат об индийском календаре. В то же время в китайской астрономической литературе появились сведения об индийских теориях планет и затмений.

К VIII в. относится начало широкого знакомства с идеями Ариабхаты в странах Ближнего и Среднего Востока и Средней Азии. «В 156 г. хиджры [т. е. в 773 г.] из Индии в Багдад прибыл человек, весьма осведомленный в учениях своей родины. Этот человек владел приемом Синдхинд, относящимся к движениям светил и вычислениям с помощью синусов, следующих через четверть градуса. Он знал также различные способы определять затмения и восход созвездий зодиака. Он составил краткое изложение одного соответствующего сочинения... В этом сочинении карdaджа были вычислены через минуты. Халиф приказал перевести индийский трактат на арабский язык, чтобы мусульмане могли приобрести точное знание звезд. Перевод был поручен Мухаммеду, сыну Ибрагима ал-Фазари, который первый из мусульман отдался углубленному изучению астрономии. Позднее этот перевод астрономы назвали Большим Синдхиндом» [34, с. 171].

Бируни указывает, что приезд индийского астронома Канки состоялся несколько ранее, в 771 г. Канка привез два сочинения индийского математика и астронома VII в. Брахмагупты: «Брахма-спхута-сиддханта» и «Кхандакхадьяка». Фазари выполнил несколько сокращенный перевод обоих сочинений и обработал их в виде традиционных для мусульманской науки зиджей — таблиц с необходимыми пояснениями и рекомендациями. Перевод-обработка первого трактата получил название «Большой Синдхинд», в отличие от других обработок сиддхант Брахмагупты.

«Большой Синдхинд», по утверждению историка арабской астрономии К. Наллино, «прославился среди арабов так, что они работали исключительно по нему вплоть до

дней ал-Ма'муна, когда начало распространяться учение Птолемея в [сфере] астрономических расчетов и таблиц» [5, с. 190].

К концу VIII в. «Ариабхатия» была также переведена на арабский язык под названием «Зидж ал-Арджабхар»; на этот перевод ссылался, в частности, Бируни. Таким образом, уже в самый ранний период знакомства арабоязычных ученых с индийской математикой и астрономией они вплотную познакомились с научным мировоззрением Ариабхаты либо по непосредственному переводу его сочинения, либо в изложении других ученых. Изучение индийской научной традиции продолжалось и в IX в. Так, Хорезми, автор широко известного сочинения «Об индийском счете», сыгравшего значительную роль в распространении позиционной десятичной системы счисления, создает свой зидж, получивший название «Малый Синдхинд».

При переводах на латынь арабских научных сочинений ряд идей Ариабхаты стали достоянием западноевропейских средневековых ученых. Наиболее ранним считается латинский перевод астрономических таблиц Хорезми, выполненный в XII в. в Испании. Другой незаконченный перевод этих таблиц был обнаружен в одном из колледжей Оксфорда. К XV в. относится латинский перевод анонимной арабской рукописи, которая начинается с 3102 г. до н. э.— даты, являющейся началом одного из индийских летосчислений; в этой же рукописи встречается индийская форма синуса.

Историки науки обычно указывают на прямые переводы на арабский язык астрономических и математических работ непосредственно с греческого оригинала. Но, как мы видим, существовал еще один путь передачи эллинистических знаний ученым стран ислама — через индийскую науку. Этот путь был длительным, но, безусловно, весьма плодотворным. Идеи Ариабхаты не только оказали влияние на развитие математики и астрономии в Индии, но и способствовали развитию отдельных направлений точных наук в странах Ближнего и Среднего Востока и средневековой Западной Европе.

Литература

1. *Бахмутская Э. Я.* Степенные ряды для sin θ, cos θ в работах индийских математиков XV—XVIII вв.— В кн.: Историко-математические исследования, вып. 13. М., Физматгиз, 1960, с. 325—334.
2. *Бахмутская Э. Я.* Бесконечные ряды в работах математиков Южной Индии в XV—XVIII вв.— В кн.: Из истории науки и техники в странах Востока, вып. 2. М., ИВЛ, 1961, с. 174—189.
3. *Башмакова И. Г., Юшкевич А. П.* Происхождение систем счисления.— Энциклопедия элементарной математики, т. 1. Арифметика. М.— Л., Техтеоретиздат, 1951, с. 11—74.
4. *Бируни.* Индия.— Избр. произв., т. II. Ташкент, Изд-во АН УзССР, 1963.
5. *Булгаков П. Г.* Жизнь и труды Беруни. Ташкент, «Фан», 1972.
6. *Бонгард-Левин Г. М., Ильин Г. Ф.* Древняя Индия. М., «Наука», 1969.
7. *Бонгард-Левин Г. М., Грантовский Э. А.* От Скифии до Индии. М., «Мысль», 1975.
8. *Бонгард-Левин Г. М.* Ариабата и его эпоха.— «Природа», 1976, № 8, с. 94—102.
9. *Ващенко-Захарченко М. Е.* Исторический очерк математической литературы индусов. Киев, 1882.
10. *Ващенко-Захарченко М. Е.* История математики, т. I. Исторический очерк развития геометрии. Киев, 1883.
11. *Володарский А. И.* О трактате Магавиры «Краткий курс математики».— В кн.: Физико-математические науки в странах Востока, вып. II (V). М., «Наука», 1969, с. 98—130.
12. *Володарский А. И.* Математика в Индии.— В кн.: История математики. С древнейших времен до начала XIX столетия, т. 1. М., «Наука», 1970, с. 179—204.
13. *Володарский А. И.* Древнеиндийские системы нумераций.— В кн.: Индийская культура и буддизм. М., «Наука», 1972, с. 82—89.
14. *Володарский А. И.* Астрономия в древней Индии.— В кн.: Историко-астрономические исследования, вып. 12. М., «Наука», 1975, с. 237—251.
15. *Володарский А. И.* Математика в древней Индии.— В кн.: Историко-математические исследования, вып. 20. М., «Наука», 1975, с. 283—299.
16. *Володарский А. И.* Математика.— В кн.: Культура древней Индии. М., «Наука», 1975, с. 362—367.

17. *Губарев В. С.* Ариабата. М., Политиздат, 1975.
18. Древнеиндийская философия. Начальный период. М., «Мысль», 1972.
19. *Лапшин В. И.* О квадратуре круга у индийцев и бесконечных рядах, которыми выражаются отношения окружности к диаметру.— «Журнал министерства народного просвещения», 1838, т. 20, с. 528—551.
20. *Лебедев В. И.* Очерки по истории точных наук, т. 1—3. Пг., 1919.
21. *Маккей Э.* Древнейшая культура долины Инда. Пер. с англ. М., ИЛ, 1951.
22. Мифы древней Индии. М., «Наука», 1975.
23. *Нейгебауэр О.* Точные науки в древности. Пер. с англ. М., «Наука», 1968.
24. *Паннекук А.* История астрономии. Пер. с англ. М., «Наука», 1966.
25. *Раик А. Е., Ильин В. Н.* Реконструкция решения некоторых задач из «Сулва-сутры» Апастамбы.— В кн.: Историко-математические исследования, вып. 19. М., «Наука», с. 220—222.
26. *Рожанская М. М.* Механика на средневековом Востоке. М., «Наука», 1976.
27. *Розенфельд Б. А.* Омар Хайям. М., «Наука», 1965.
28. *Розенфельд Б. А., Рожанская М. М., Соколовская З. К.* Абу-р-Райхан ал-Бируни. М., «Наука», 1973.
29. *Хорезми.* Математические трактаты. Ташкент, «Фан», 1964.
30. *Шаль М.* Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов. М., 1883.
31. *Шереметевский В. Р.* Очерки по истории математики. М., Учпедгиз, 1940.
32. *Щербатской Ф. И.* Научные достижения древней Индии.— В кн.: Избранные труды русских индологов-филологов. М., «Наука», 1962, с. 254—270.
33. *Шридхара.* Патиганита.— В кн.: Физико-математические науки в странах Востока, вып. I (IV). М., «Наука», 1966, с. 141—246.
34. *Юшкевич А. П.* История математики в средние века. М., Физматгиз, 1961.
35. *Юшкевич А. П., Розенфельд Б. А.* Математика в странах Востока в средние века.— В кн.: Из истории науки и техники в странах Востока, вып. 1. М., ИВЛ, 1960, с. 349—421.
36. Algebra with arithmetics and mensuration from the sanscrit of Brahmegupta and Bhaskara. Transl. into English by H. T. Colebrooke. London, 1817.
37. Āryabhaṭīya. A manual of astronomy also called Āryasiddhānta with the commentary Bhaṭadīpikā of Paramādīšvara. H. Kern (Ed.). Leiden, 1874.
38. Āryabhaṭīya. Transl. into Hindu, publ. with expl. notes by A. N. Singh. Madhurapur, Etawah, 1906.
39. The Āryabhaṭīyam. Transl. into English by P. C. Sengupta. — «J. Dep. Letters Calcutta Univ.», 1927, v. 16, p. 1—56.
40. Āryabhaṭīya of Āryabhata. Transl. into English with notes by W. Clark. Chicago, 1930.
41. Āryabhaṭīya. A manual of astronomy with commentary of

Nīlakantha Somasutvan. Pts 1, 2. K. Sāmbašiva Šāstrī (Ed.). Trivandrum, 1930—1931; pt 3. Suranad Kunjan Pillai (Ed.). Trivandrum, 1957; B. Mishra (new ed.). Patna, 1966.

42. *Āryabhaṭa II.* The Maha-siddhanta. S. Dvivedi (Ed.). Benares, 1910.

43. *Bentley J.* Historical view of the Hindu astronomy. Calcutta, 1823.

44. *Bhaskara I.* Mahabhaskariya. Transl. into English by K. S. Shukla. Lucknow, 1960; Laghubhaskariya. Transl. into English by K. S. Shukla. Lucknow, 1963.

45. *Bhaskara II.* Siddhanta-siromani. Transl. into English by B. Sastri and L. Wilkinson.— «Bibliot. indica», 1861, v. 32.

46. *Bhau Daji.* Brief notes on the age and authenticity of the works of Aryabhata, Varahamihira, Brahmagupta, Bhattotpala and Bhaskaracharya.— «J. Roy. Asiat. Soc.», 1865, p. 392—418.

47. *Billard R.* L'astronomie indienne. Paris, 1971.

48. *Brahmagupta.* The Brahma-sphuta-siddhanta. Ed. with notes by S. Dvivedi. Benares, 1902.

49. *Brahmagupta.* Khandakhadyaka. Transl. into English by B. Chaterjee. Calcutta, 1970.

50. *Colebrooke H. T.* Aryabhata's doctrine: age of Aryabhata. — In: Miscellaneous essays, v. 2. London, 1837, p. 467—477.

51. *Datta B.* Two Aryabhatas of al-Biruni.— «Bull. Calcutta Math. Soc.», 1926, v. 17, p. 59—74.

52. *Datta B.* Aryabhata, the author of the «Ganita».— «Bull. Calcutta Math. Soc.», 1927, v. 18, p. 5—18.

53. *Datta B.* Elder Aryabhata's rule for the solution of indeterminate equations of the first degree.— «Bull. Calcutta Math. Soc.», 1932, v. 24, p. 19—36.

54. *Datta B., Singh A. N.* History of Hindu mathematics. A source book, v. 1, 2. Bombay, 1962.

55. *Elfering K.* Die Mathematik des Aryabhata I. München, 1975.

56. *Fleet J. F.* Aryabhata's system of expressing numbers.— «J. Roy. Asiat. Soc.», 1911, p. 109—126.

57. *Ganguly S. K.* Notes on Aryabhata.— «J. Bihar and Orissa Res. Soc.», 1926, v. 12, p. 78—91.

58. *Ganguly S. K.* Was Aryabhata indebted to the Greeks for his alphabetical system of expressing numbers?— «Bull. Calcutta Math. Soc.», 1926, v. 17, p. 195—202.

59. *Ganguly S. K.* The elder Aryabhata and the modern arithmetical notation.— «Amer. Math. Monthly», 1927, v. 34, p. 409—415.

60. *Ganguly S. K.* The source of the Indian solution of the so-called Pellian equation.— «Bull. Calcutta Math. Soc.», 1928, v. 19, p. 151—176.

61. *Ganguly S. K.* The elder Aryabhata's value of π.— «Amer. Math. Monthly», 1930, v. 37, p. 16—29.

62. *Hall F.-E.* On the Arya-siddhanta. — «J. Amer. Orient. Soc., 1860, v. 6, p. 556—559.

63. *Kaye G. R.* Notes on Indian mathematics.— «J. Asiat. Soc. Bengal», 1908, v. 4, p. 111—141.

64. *Kaye G. R.* Two Aryabhatas.— «Bibliot. math.», 1910, v. 10, p. 289—292.

65. *Kaye G. R.* The Bakhshali manuscript. A study in medieval mathematics pts 1, 2. Calcutta, 1927.

66. *Kern H.* On some fragments of Aryabhata.— «J. Roy. Asiat. Soc.», 1863, v. 20, p. 371—387.

67. *Mahavira.* The Ganita-sara-sangraha. Transl. into English with notes by M. Rangacarya. Madras, 1912.

68. *Mazumdar N. K.* Aryabhata's rule in relation to indeterminate equations of the first degree.— «Bull. Calcutta Math. Soc.», 1911—1912, v. 3, p. 11—19.

69. *Pingree D.* Aryabhata.— In: Dictionary of scientific biography, v. 1, N. Y., 1970, p. 308—309.

70. *Ramanujacarya N., Kaye G. R.* The Trisatika of Sridharacarya.— «Bibliot. math.», 1912—1913, 3. F., v. 13.

71. *Rodet L.* Leçons de calcul d'Aryabhata.— «J. asiat.», 1879, v. 13, p. 393—434.

72. *Rodet L.* Sur la véritable signification de la notation numérique inventée par Aryabhata.— «J. asiat.», sér. 7, 1880, v. 16, p. 440—485.

73. *Sen S. N.* Aryabhata's mathematics.— «Bull. Nat. Inst. Sci. India», Delhi, 1963, v. 21, p. 297—319.

74. *Sen S. N.* Astronomy and mathematics.— In: A concise history of science in India. Delhi, 1971, p. 58—212.

75. *Sengupta P. C.* Aryabhata's method of determining the mean motions of planets.— «Bull. Calcutta Math. Soc.», 1920—1921, v. 12, p. 183—188.

76. *Sengupta P. C.* Aryabhata, the father of Indian epicyclic astronomy.— «J. Dep. Letters Calcutta Univ.», 1929, v. 18, p. 1—56.

77. *Sengupta P. C.* Aryabhata's last work.— «Bull. Calcutta Math. Soc.», 1930, v. 22, p. 115—120.

78. *Sripati.* The Siddhanta-sekhara. B. Misra (Ed.). Calcutta, 1932.

79. The Surya-siddhanta with the commentary of Paramesvara. Ed. with introd. by K. S. Shukla. Lucknow, 1957.

80. *Varahamihira.* Panča-siddhanta. Pt 1, Text and transl. by D. Pingree; pt 2. Comment. by O. Neugebauer and D. Pingree. Copenhagen, 1970—1971.

81. *Whish C. M.* De la notation alphabetique des Indiens.— «J. asiat.», sér. 2, 1835, v. 16, p. 116—130.

Содержание

Александр Ильич Володарский

АРИАБХАТА

Утверждено к печати редколлегией научно-биографической серии Академии наук СССР

Редактор *Е. И. Володина*
Художественный редактор *Ю. П. Тропаков*
Технический редактор *Л. И. Куприянова*
Корректоры *К. В. Кастрова, Г. Н. Лащ*

Сдано в набор 21/IX 1976 г. Подписано к печати 17/XII 1976 г.
Формат 84×108 1/32. Бумага типографская № 2. Усл. печ. л. 5,88.
Уч.-изд. л. 5,3. Тираж 24000. Т-21642. Тип. зак. 1219. Цена 32 коп.

Издательство «Наука»
103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., д. 21
2-я типография издательства «Наука».
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10